HEM 3, kapitel 11, Fagligt samarbejde matematik-fysik. Øvelse 49

Vi ønsker at vise, at der for en ellipse gælder formlen: $r + r \cdot e \cdot \cos(\theta) = a \cdot (1 - e^2)$.

Vi vil udnytte ellipsens ligning:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ , som vi kan omskrive til: } y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 \qquad (*)$$

Endvidere formlen, der kæder *a*, *b* og *e* sammen:

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2} \text{ , som kan omskrives til: } a^2 \cdot e^2 = a^2 - b^2 \qquad (**)$$

Vis selv disse omskrivninger!

Først finder vi et udtryk for *r*:

F har koordinaterne: $F(ae, 0)$.

Afstandsformlen fra vektorregningen giver:

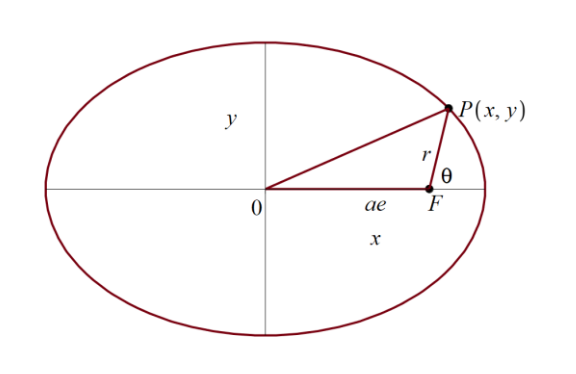
$$r^2 = |FP|^2 = (x - ae)^2 + y^2$$

Anvend nu (*) og en af kvadratsætningerne:

$$r^2 = \left(x^2 + a^2 \cdot e^2 - 2 \cdot a \cdot e \cdot x\right) + \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2\right)$$

Anvend nu (**):

$$r^2 = x^2 + a^2 - b^2 - 2 \cdot a \cdot e \cdot x + b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2$$



Reducer og omskriv, idet vi igen udnytter (**) og en kvadratsætning ”baglæns”

$$r^2 = x^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot e \cdot x - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2$$

$$r^2 = x^2 \cdot \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + a^2 - 2 \cdot a \cdot e \cdot x$$

$$r^2 = x^2 \cdot e^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot e \cdot x$$

$$r^2 = \left(a - xe\right)^2$$

Af dette får vi: $r = a - e \cdot x$

Dernæst omskriver vi $r \cdot e \cdot \cos(\theta)$. Vi anvender trigonometri (se tegningen):

$$r \cdot e \cdot \cos(\theta) = e \cdot r \cdot \cos(\theta) = e \cdot (x - ae) = e \cdot x - a \cdot e^2$$

Ved at kombinere de to udtryk får vi så:

$$\begin{aligned} r + r \cdot e \cdot \cos(\theta) &= \left(a - e \cdot x\right) + \left(e \cdot x - a \cdot e^2\right) \\ &= a - a \cdot e^2 \\ &= a \cdot (1 - e^2) \end{aligned}$$

hvilket netop var det ønskede udtryk.