

## Projekt 7.16 Perspektivgeometri

### 1. Mennesket i centrum - opdagelsen af centralperspektivet

I begyndelsen af 1400-tallet gør kunstnere i den norditalienske by Firenze en opdagelse, der kommer til at revolutionere malerkunsten. De løser i en vis forstand det uløselige problem: at afbilde en tredimensionel verden på en todimensionel flade, så det bliver en troværdig gengivelse. Den grundlæggende ide i dette *centralperspektiv* er at gengive et motiv, ikke som det *er*, og heller ikke farvet af særlige *værdier* eller *holdninger til motivet*, men præcis som kunstneren *ser* det fra et bestemt sted. En by *er* ikke, som vi ser den fra en bakketop udenfor byen, den rummer flere huse og gader og mennesker. Men med den nye metode maler vi det, vi *ser*. En person, der ses i profil, har givetvis også et øje og et øre på den anden side af ansigtet, men vi maler kun det, vi *ser*.

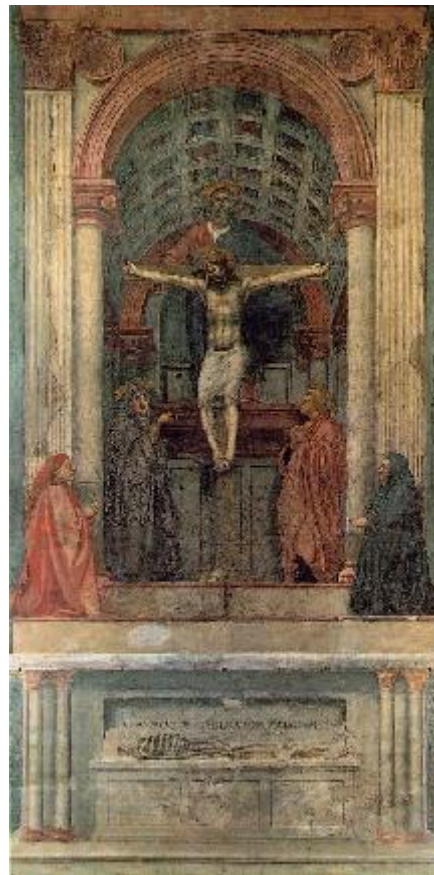
Vi *ser* verden som et rum med dybde, og formår vi at gengive det, vi *ser*, så burde andre få samme oplevelse, når de ser vores tegning. Et maleri kan også være et produkt af kunstnerens fantasi, men hvis kunstneren har så stor en indbildningskraft, at han kan se det for sig, og maler det han ser, så burde vi også kunne se det, han har set.

I kirken Santa Maria Novella i Firenze kan man se et af kunsthistoriens første centralperspektiviske billeder. Her fik den unge Masaccio (1401-1428) en opgave, der gav ham mulighed for at give en eksemplarisk demonstration af den nye teknik.

Masaccio maler sit tænkte motiv sådan, som han ser det fra et ganske bestemt punkt, som vi kalder *øjepunktet*! Når han er færdig, kan han tilbyde os, at vi stiller os, hvor han stod, så vores øjne er, hvor hans var. Derved ser vi det, han så, og ser det, som var det tredimensionelt, hvis han har gengivet det korrekt. Så enkel er den nye metode.

Og det er præcis her det nye og revolutionerende lå. For når man maler ud fra centralperspektivet, så gør man sig selv til centrum i verden. *Jeg* ser Gud og øvrigheds personer i øjnene, *jeg* er ikke bare et objekt for dem - *jeg* er selv et subjekt, der ser på dem, og derved møder dem på lige fod. *Humanismen*, der i stigende grad sætter det enkelte menneske i centrum, er født!

Betragter vi billedet fra et andet sted end fra øjepunktet, så forsvinder dybdevirkningen. Selv om verden er den samme, så er det, vi ser hver for sig, forskelligt. Masaccio malede billedet, sådan som motivet ville se ud set fra en ganske bestemt afstand foran billedet. Denne afstand kaldes *distancen* og den er naturligvis så stor, at han ikke kunne stå der og male. Så han må have haft en bestemt teknik, der gav ham mulighed for at male, *som om* han stod i denne afstand med øjet i øjepunktet. Denne teknik omtales nærmere i afsnit 1.1.



Masaccios freske (kalkmaleri) Treenigheden, som findes i Santa Maria Novella, giver os forestillingen om, at vi ser ind i væggen. Det er malet omkring 1425.

Projekter: fra kapitel 7 Projekt 7.16 Perspektivgeometri

Det er vigtigt at lægge mærke til forskellen: *Jeg ser* verden perspektivisk, men verden er *ikke* perspektivisk. Jernbanespor mødes ikke i virkeligheden, men det ser sådan ud for *mig*. Personer eller træer, der er langt væk, er ikke små i virkeligheden, men de ser sådan ud for *mig*.

### Øvelse 5.1

Du kan [her](#) – finde nogle af Lorenzettis fresker (kalkmalerier) fra rådhusalen i byen Siena. Freskerne er malet i årene 1338-40 og har titlen *Den gode og den dårlige regering*. Det er altså malet før perspektivet. Endvidere gengives et perspektivisk billede af en by, tegnet midt i 1400-tallet. Og endelige er gengivet et maleri fra 1918 af den danske kubistiske maler Jais-Nielsen. Sammenlign disse tre bybilleder, og giv et bud på, hvad der er styrken og svagheden i de forskellige metoder. I kapitel 10, *Matematik og kultur* uddybes dette og der lægges her op til et fagligt samarbejde.

Når centralperspektivet bryder igennem netop på dette tidspunkt og netop i Norditalien, så er forklaringen den enkle at tiden var moden til det. Både i den fremvoksende borgerstand i Norditalien, blandt mange af bystaternes fyrster, og i de kunstneriske og intellektuelle miljøer, var der en længsel efter at bryde ud af middelalderkirkens snærende bånd. Den sorte død (1348-50), der på to år havde udryddet en tredjedel af Europas befolkning og lagt mange bystater øde, lå kun få årtier tilbage, og havde bidraget til at svække kirkens autoritet. Man havde oplevet, at kirken kun gav meningsløse svar på den meningsløse død. I stedet voksede der en tro frem på menneskets egne muligheder under stærk inspiration af den viden om oldtidskulturerne og de tekster fra den tids filosoffer og videnskabsmænd, der begyndte at dukke op.

Fillipo Brunelleschi (1377-1445) personificerer i en vis forstand denne udvikling. Han var ingeniør, arkitekt og videnskabsmand, og så var han ifølge overleveringen den første, der demonstrerede centralperspektivet som ny metode. Det skete omkring år 1415, men desværre er hans tegninger ikke bevaret.

### Øvelse 5.2

Du kan [her](#) finde en film, der giver et bud på, hvad det var Brunelleschi gjorde.

Ideen og demonstrationen var åbenbart overbevisende, for brugen af centralperspektivet bredte sig nærmest som en steppebrand. Efter nogle få årtier havde stort set alle kunstnere i Italien taget de nye metoder til sig.

Domkirken i Firenze kom på tilsvarende vis til at stå som et symbol på opgøret med middelalderens gotiske himmelstræbende arkitektur.



Brunelleschis navn er ikke mindst knyttet til den imponerende kuppel på domkirken i Firenze. Der var konstrueret kupler før, men aldrig over så stort et rum. Den normale metode ville være at understøtte med trækonstruktioner, mens byggeriet stod på, men det var helt urealistisk med så stor en kuppel. Brunelleschi løste problemet ved at konstruere to kupler inden i hinanden, på en sådan måde, at der bliver et træk udad. Uden lanternen på toppen ville kuplen åbne sig!

Der havde igennem middelalderen eksisteret en opfattelse af, at menneskenes samfund var faldet ned af kulturens stige fra en svunden guldalder i oldtiden. Det, der voksede frem, blev derfor opfattet som en slags *genfødsel*, og eftertiden har da også givet perioden fra 1400 til 1600 navnet *renæssancen*. Og man kan sige, at renæssancen blev indvarslet af de to store intellektuelle præstationer - bygningen af kuplen og opdagelsen af centralperspektivet - der hver for sig viste, at man kunne nå videre, end de gjorde i oldtiden.

Den nye humanisme kommer også til udtryk gennem et andet særtræk ved den nye stil. Det er mennesker med et navn, der har malet det, og det er rigtige mennesker, ikke bare stiliserede figurer, der gengives. I perioden op til renæssancen kender vi navnene på enkelte, som fx Giotto (1267-1337), der også var fra Firenze, og som har lagt navn til det høje, smalle, hvide tårn (Campanilen) ved siden af domkirken. Han har med stor sandsynlighed også anvendt levende mennesker som modeller for sine malerier. Men det normale er, at vi ikke kender kunstneren - det er jo bare en håndværker - og at figurerne er typer uden liv.

Masaccio blev omkring 1423 inddraget i udsmykningen af et privat kapel, som en af de velstående familier havde ved en af byens kirker. Han er kun 21 år, men maler, så man aldrig har set magen. Kvinden med barnet og alle de andre figurer, man kan finde på hans fresker i det lille *Branccacci kapel*, er rigtige mennesker, med ansigter der udtrykker bekymring, ømhed, frygt osv. Via [hjemmesiden](#) kan du se de andre billeder fra kapellet.



## 1.1 Perspektivgeometri.

Det første skrift om perspektivet udkom allerede i 1436. Forfatteren Leon Battista Alberti (1404-1472) gav det titlen *Della Pittura*, der betyder *Om at male*, og værket bliver da også ofte præsenteret som den første lærebog i perspektivgeometri. Men Albertis sigte er større, og man kan i hans værk se spirene til den nye verdensanskuelse, der bryder igennem i renæssancen. Værket er tredelt, og han forklarer i et brev til Brunelleschi, som han dedikerer værket til, indholdet i de enkelte dele:

*Du vil se, at værket består af tre dele. Første del, som er rent matematisk, viser hvordan denne ædle og smukke kunst vokser ud af naturen selv. Anden del lægger denne kunst i hænderne på kunstnerne, fremhæver enkeltdele og forklarer det hele. Tredje del forklarer kunstneren, hvordan han kan nå frem til fuldstændig at beherske og forstå malerkunsten.* (brev fra Alberti 1435)

Kendskab til matematik var en del af datidens almindelse, den græske matematiker Euklid var den store autoritet, og det var helt almindeligt at indlede et større værk med en indføring i matematik. Det var et signal om, at dette ikke er Albertis påfund, men at det er et videnskabeligt værk, som man bør tage til sig. Bog tre rummer en række krav til kunstneren, der skal være "en god mand", hvormed Alberti mener, at han skal have en høj moral og have et godt kendskab til både poesi og retorik samt til håndværk og industri, og han skal lytte til sine lærere!

Som lærebog er værket ikke så ligetil at anvende, idet Alberti ikke illustrerede sine forklaringer. Det måtte man selv finde ud af, ud fra hans anvisninger. Men det er i dette værk, man første gang ser en formulering af reglen, om at *parallelle linjer mødes i et forsvindingspunkt*. Jernbanespor, der bare fortsætter ligeud, *ser ud til* at mødes, og ligger der mange spor ved siden af hinanden, ville de alle *se ud til* at mødes i samme punkt ude i *horisonten*. Den grundlæggende regel i perspektivtegning er med Albertis ord "*at tegne de ting vi ser*" (bog II, paragraf 230), så derfor skal parallelle linjer tegnes sådan.

Alberti foreslår derfor, at man som et hjælpemiddel i konstruktion af en perspektivtegning starter med at tegne billedet af et skakternet mønster. Linjerne og diagonalerne giver os bundter af parallelle linjer, og har vi først tegnet det op, har vi en slags koordinatsystem, som vi kan tegne videre i. Det fremgår da også af mange billeder fra italiensk og senere hollandsk renæssance, at malerne med stor forkærlighed lavede sådanne flisegulve, ofte umotiverede ud fra billedets indhold og budskab i øvrigt.

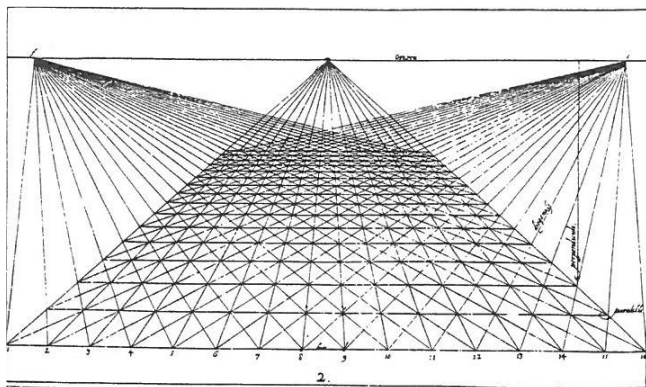


Illustration fra hollandsk lærebog i perspektivtegning fra 1604. Bemærk, at bredden af skakternene på grundlinjen er ens. Det betyder, at de parallelle linjer har samme afstand. Når sådanne parallelle linjer i planen skæres af en linje m, så vil alle stykkerne, som linjen m skæres op i, være lige store. I vores perspektivtegning siger vi, at sådanne stykker er perspektivisk lige lange. På ovenstående tegning kan vi derfor se, at alle skakternene også har samme kantlængde. Men vi kan ikke afgøre, om det er kvadrater, dvs. om længde og bredde er ens.



Pieter de Hooch, En kvinde drikker vin sammen med to mænd (1658). Røntgenundersøgelser afslører, at rummet med det skakternede gulv blev malet først og figurerne sat på bagefter. Bemærk fx, at man kan se gulvets mønster gennem servitricens kjole. I det oprindelige udkast var der placeret en person på servitricens højre side.

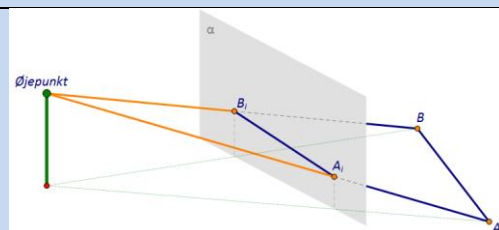
Pieter de Hoochs billede illustrerer også at skakternene ikke er et mirakelværktøj. Servitricen ser alt for lille ud, når vi ser hende i forhold til de øvrige. Men tæller vi tern, kan vi se, at hun er placeret længere væk end bordet. Problemet er blandt andet, at billedets dimensioner er beskedne (målene er 73.7 x 64.6 cm), og som vi vil se i Øvelse 5. \*\* nedenfor, er distancen ca. 1,5 m. Moderne kognitionsforskning fortæller, at når et motiv er så tæt på, så kolliderer perspektivet med vores måde at opfatte verden på. Det er interessant, at Alberti må have haft en intuitiv fornemmelse af dette, idet han fremhæver i en af sine regler: "Man skal afstå fra at male i meget små formater" (Bog III, § 57).

### En moderne fremstilling af perspektivgeometri med brug af vektorregning og analytisk geometri

Vi har i det foregående støttet os til intuitionen i diskussionen af perspektivgeometriens muligheder og problemer. Nu vil vi gå over til en mere moderne matematisk behandling med definitioner og sætninger.

#### Definition: Billedplan og billedpunkt

1. Den plan, vi vil afbilde motivet på, kaldes *billedplanen*,  $\alpha$ . Den er placeret lodret og tænkt uendelig stor
2. Den linje vi altid kan tegne fra  $O$  til et givet punkt  $A$  kaldes en *synsstråle*. Synsstrålen skærer  $\alpha$  i et punkt  $A_i$ , og dette skæringspunkt er *billedet af  $A$  ved centralprojektion*.



**Definition: Spor og forsvindingspunkter**

En linje  $l$ , der ikke er parallel med  $\alpha$ , vil skære denne i et punkt, der kaldes *linjens spor* og betegnes  $S_l$ .

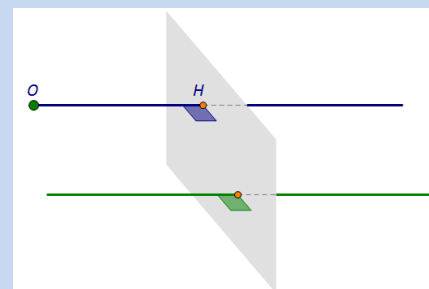
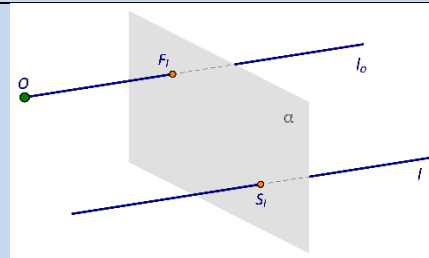
En plan  $\beta$ , der ikke er parallel med  $\alpha$ , vil skære denne i en linje, der kaldes *planens spor* og betegnes  $S_\beta$ .

Træk gennem  $O$  en linje  $l_0$ , parallel med  $l$ . Denne linje skærer  $\alpha$  i et punkt, vi kalder *forsvindingspunktet*  $F_l$  for linjen  $l$ .

Forsvindingspunktet for linjer vinkelret på  $\alpha$  kaldes *hovedpunktet*, eller *hovedforsvindingspunktet*,  $H$ . Det fremkommer ved at trække en linje fra  $O$  vinkelret ind på  $\alpha$ .

En vandret plan beliggende *under* øjepunktet kaldes en *grundplan*. Det er i praksis ofte jorden, vi står på, et stuegulv eller lignende. Men det behøver ikke at være det. Grundplanens spor kaldes en *grundlinje*.

Den vandrette plan gennem øjepunktet  $O$  skærer billedplanen i en linje, vi kalder *horisonten*.



*Bemærkning.* Af definitionen følger, at parallelle linjer har samme forsvindingspunkt.

**Sætning 1: Billedet af linjestykker.**

1. Billedet af et ret linjestykke i rummet er et ret linjestykke i billedplanen  $\alpha$ .
2. Et lodret (henholdvis et vandret) linjestykke afbildes i et lodret (henholdvis et vandret) linjestykke i  $\alpha$ .

**Bevis:**

Bevis for 1: Se på figur 1. På linjen  $l$  ligger punkterne  $A$  og  $B$ .  $A$  afbildes i  $A_i$ ,  $B$  afbildes i  $B_i$ .  $OAB$  bestemmer en plan  $\beta$ . Denne plan vil indeholde enhver linje, der er bestemt af to punkter i planen. Derfor vil enhver synsstråle fra  $O$  til et punkt på  $l$  ligge i planen  $\beta$ .  $\beta$  skærer  $\alpha$  i en linje, som derfor må indeholde alle billedpunkter fra  $l$ , eller de dele af linjen vi betragter. Specielt afbildes linjestykket  $AB$  i linjestykket  $A_iB_i$ .

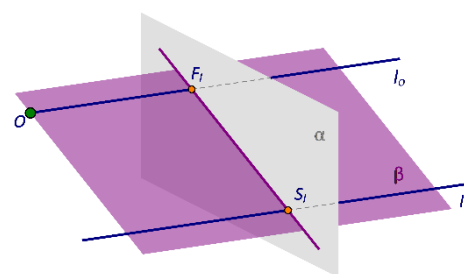
Bevis for 2: Tegn selv figurer, og gennemfør et argument for de to påstande, efter samme retningslinjer som i beviset ovenfor.

**Sætning 2: Perspektivgeometriens hovedsætning**

Billedet af linjen  $l$  er linjestykket  $l_\alpha$  i  $\alpha$  bestemt ved  $S_l$  og  $F_l$ .

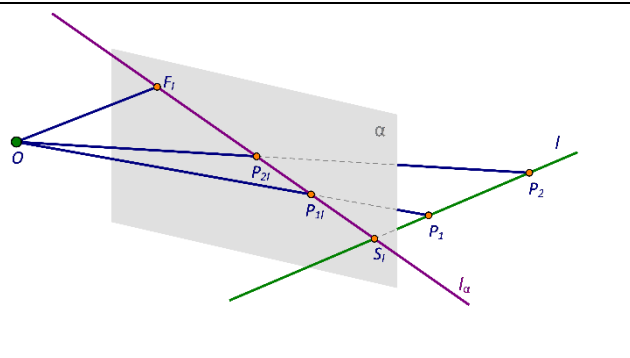
**Bevis:**

Planen bestemt af  $l$  og  $O$  kaldes  $\beta$ .  $\beta$  skærer  $\alpha$  i en linje. Linjen må nødvendigvis indeholde punktet  $S_l$ . Men da  $\beta$  må indeholde linjen  $l_0$  gennem  $O$  parallel med  $l$  så vil også forsvindingspunktet  $F_l$  ligge i både  $\beta$  og  $\alpha$ . Derfor ligger også  $F_l$  på skæringslinjen. Men da en linje er bestemt ved to punkter, må den søgte linje netop være den, der bestemmes ved  $S_l$  og  $F_l$ .



*Bemærkning.* Uanset sætningens meget enkle indhold er den uhyre nyttig, og selv det ikke altid udtrykkes eksplicit, så anvendes sætningen i stort set alle argumenter indenfor perspektivgeometrien.

**Bemærkning.** (Se figuren) Træk synsstrålen fra  $O$  til et punkt  $P$  på  $l$ . Lad nu  $P$  gennemløbe punkter  $P_1, P_2$  osv. ud mod uendelig. På  $l_\alpha$  sker der nu det, at  $P_{ki}$ 'erne nærmer sig  $F_1$ . Her ligger begrundelsen for anvendelsen af begrebet forsvindingspunkt.



### Øvelse 5.3

- Lad dit papir være billedfladen, marker horisonten med en vandret linje og tegn billedet af to forskellige bundter af vandrette og parallelle linjer.
- Hvordan skal linjerne tegnes, hvis de ikke er vandrette?
- Hent på [her](#) en illustration fra den omtalte hollandske lærebog fra 1604 og find fejlene.

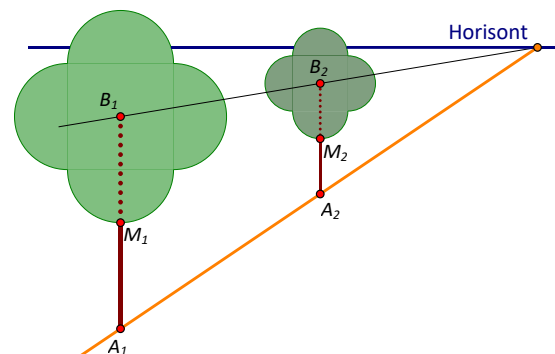
Har vi omvendt foran os et billede af to linjer, som vi ved, er parallelle, kan denne viden udnyttes: Linjerne forlænges og må mødes i deres forsvindingspunkt. Dvs. vi kan bestemme dette. Er linjerne vinkelret på billedfladen kan vi på denne måde bestemme hovedforsvindingspunktet, og derved også horisonten!

### Øvelse 5.4

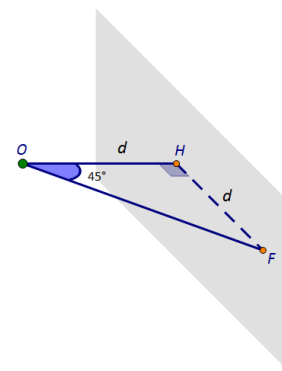
[Her](#) kan du finde kopier, du kan tegne videre på af henholdsvis Masaccios billede *Treenigheden* og Pieter de Hoochs billede af kvinden og de to mænd. Bestem hovedforsvindingspunktet samt horisonten.

### Øvelse 5.5

Hent på bogens [website](#) en tegning som denne – eller tegn selv en tilsvarende - og tegn videre ved at afsætte et antal træer af samme højde og med samme afstand mellem dem. (Vink: Spørgsmålet om *samme afstand* kan du løse, ved at læse billedteksten til den hollandske illustration vedrørende tegning af skakternede gulve.



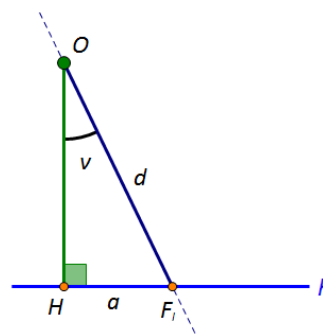
Lad os igen betragte illustrationerne ovenfor med skakternede gulve. Diagonalerne i sådanne mønstre udgør to bundter af parallelle linjer, og de frembringer således to forsvindingspunkter på horisonten, et til venstre for og et til højre for  $H$ . Tegner vi linjen gennem øjepunktet  $O$ , parallel med sådanne diagonaler, så vil denne skære horisonten i pågældende forsvindingspunkt  $F$ . Men nu lægger vi mærke til, at tegningen viser en ligebenet trekant  $OHF$ , fordi diagonalerne giver en vinkel på  $45^\circ$ . Men så er stykkerne  $HF$  og  $OH$  lige store - og  $OH$  er jo distancen, der angiver, hvor vi skal stå, for at se det, som kunstneren så. Herfra skal billedet opleves. Distancen kan således bestemmes inde på billedfladen!



### Øvelse 5.6 Bestem distancen

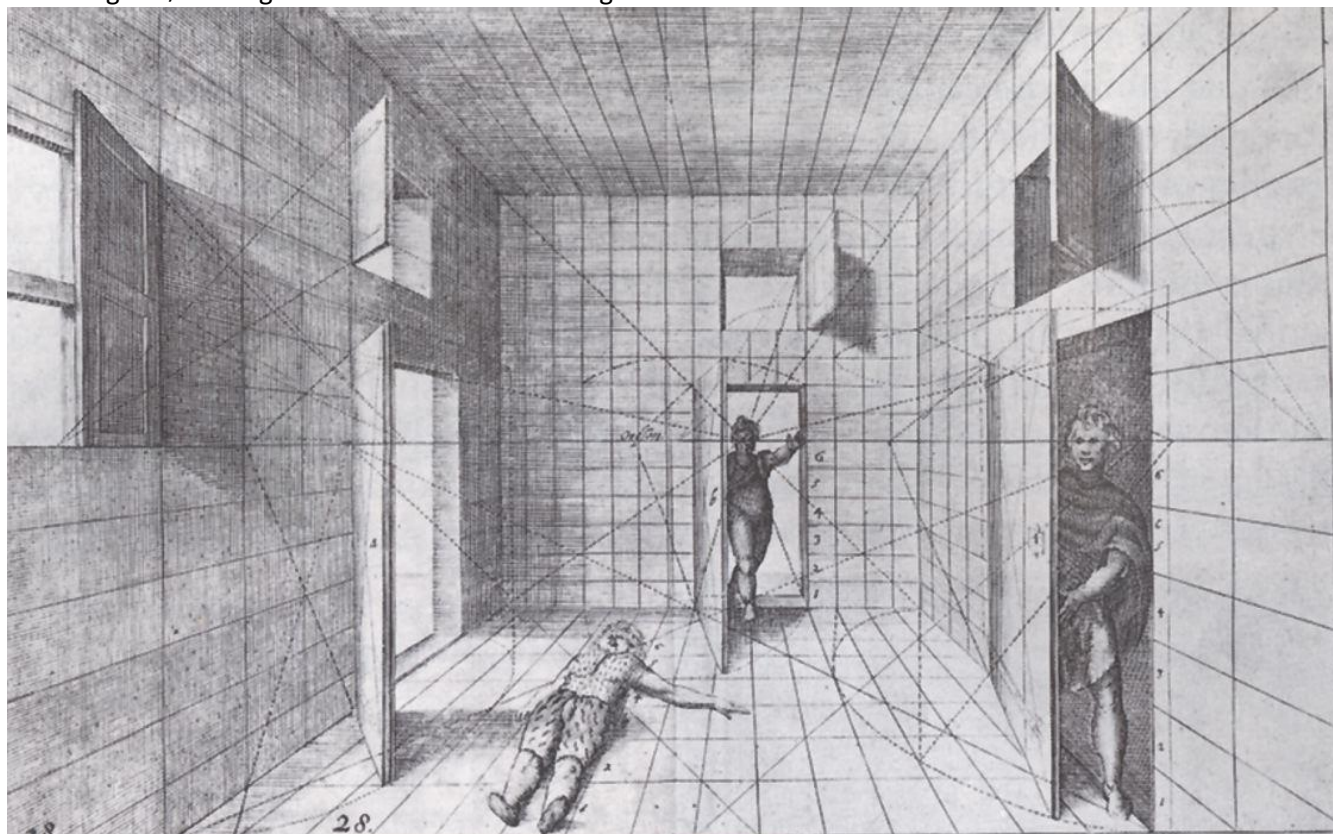
På bogens [website](#) kan du finde arbejdsark med gengivelser af Pieter de Hoochs billede og en række andre. Hent det og bestem distancen!

Kender vi distancen, kan vi bestemme ganske meget ud fra et givet billede. Argumentér ved hjælp af illustrationen for, at der gælder:  $d \cdot \tan(\nu) = a$ , og at vi dermed kan opstille en tabel for samhørende værdier af vinklen  $\nu$  og tallet  $a$ . Vinklen  $\nu$  er den vinkel, en given linje danner med normalen. Tallet  $a$  angiver afstanden fra  $H$  til linjens forsvindingspunkt. Tabellen kan afsættes på horisonten  $h$  som en skala, der om hvert forsvindingspunkt fortæller, hvilken vinkel denne danner i virkeligheden med normalen.



### Øvelse 5.7 Bestem vinkler

I en hollandske lærebog, kan man finde øvelser som denne, hvor man ud fra en illustration blandt andet skal angive hvor meget dørene og vinduerne er åbnet i virkeligheden.



Kvadratet består af kvadrater. Kan du på tegningen finde et argument for dette:

Kvadratnettet på væggene er udført med samme kvadrater. Ud fra en anslået højde for personer sætter vi sidelængden i kvadrater til 26 cm.

- Bestem horisonten og hovedforsvindingspunktet.
- Bestem dernæst distancepunkt(erne).
- Opmål distancen.
- Læg en tangensskala på horisonten.
- Bestem de vinkler dørene, vinduerne og lemmene er åbnet i.
- Tegn selv en dør i den venstre dørfylding, således at døren er åbnet i en vinkel på  $150^\circ$  med dørfyldingen.