ISBN 9788770668279

L&R Uddannelse
EGMONT

Projekt 8.4 Logaritmefunktionerne

Indhold

Mange funktioner er igennem historien første gang opstået som *tabellagte* funktioner. Sådanne tabeller kender vi helt tilbage fra den old-ægyptiske og den old-babylonske matematik for ca. 4000 år siden. Disse tabeller, der repræsenterer en ganske avanceret matematik, kan du møde som projekter forskellige steder i lærebogssystemet, fx I det foregående kapitel 7 om *Tal og Ligninger*. Via **bogens website** er der yderligere adgang til en enestående portal med scannede eller digitaliserede versioner af alskens tabeller fra matematikhistorien.
Logaritmefunktionerne opstår som et omfattende tabelværk i første del af 1600-tallet. De konstrueres som regnetekniske funktioner, der er i stand til at oversætte multiplikation og division til ”plus og minus-stykker”. Og logaritmernes ”vidunderlige egenskaber” rakte endnu videre – ved hjælp af dem kunne man meget enkelt uddrage kvadratrødder og løse eksponentielle ligninger. Hovedæren for opfindelsen af logaritmerne og konstruktionen af tabellerne tilfalder den skotske godsejer John Napier, der brugte de 20 sidste år af sit liv på dette. Formuleringen om de vidunderlige egenskaber stammer fra hans første tabelsamling. Han dør midt i arbejdet, men en engelsk ven, Henry Briggs overtager arbejdet og forenkler Napiers system, så det bliver de logaritmer, vi i dag kender som titals logaritmerne, og som blev anvendt i skoler og til praktiske beregninger indtil regnestokke og lommeregnere overtog arbejdet med tabelopslag.

Via bogens website er der adgang til et lille projekt om **regnestokke (projekt 8.8, Napiers stave),** og til større projekter om **logaritmernes historie (projekt 8.7 Den franske revolutions logaritmefabrik**), om de helt specielle beregningsmetoder, man anvendte før logaritmerne, metoder der byggede på de trigonometriske funktioners egenskaber (**projekt 8.13 Prostaphaeresis-Logaritmiske beregninger med sin og cos),** samt om linearisering og anvendelse af **logaritmiske koordinatsystemer (projekt 8.5 Linearisering og anvendelsen af logaritmiske koordinatsystemer)**

I moderne matematik bliver Logaritmefunktionerne indført på en helt anden måde, hvilket vi vender tilbage til på B- og A-niveau.

ISBN 9788770668279

1. $\log(x)$ og 10^x som omvendte funktioner

I kapitel 3 udvidede vi potensbegrebet, så udtryk som a^x hiver mening for alle tal x, når *a* er et positivt tal.

Øvelse 1 Det udvidede potensbegreb

$a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$, men hvordan definerede vi tal som:

1) a^0 2) a^{-7} 3) $a^{\frac{1}{2}}$

4) $a^{\frac{1}{5}}$ 5) $a^{\frac{5}{7}}$ 6) $a^{2.76}$

Slå evt tilbage til kapitel 3 og repeter reglerne.

Når vi har defineret potenser af alle brøker, har vi også defineret potenser af alle *endelige* decimaltal som 3.1415 og potenser af alle *periodiske* decimaltal som $3.14285714\ldots = 3.\overline{142857}$. Disse kan nemlig skrives som brøker. Fx er $3.\overline{142857} = \dfrac{22}{7}$. Vi har ikke dermed fået defineret a^x for *alle reelle tal*, men alle de decimaltal, der svarer til brøker, ligger meget tæt på tallinjen. Så det sidste skridt med at få alle tal med tager vi ved at kræve, at grafen for a^x skal være kontinuert (sammenhængende).

Det betyder specielt, at 10^x er defineret for alle tal. Hvad er fx $10^{1.39}$?

Da $10^0 = 1$ og $10^2 = 100$, så må $10^{1.39}$ være et tal mellem 1 og 100. Værktøjsprogrammet giver:

$10^{1.39} = 24.547$, med 3 decimalers nøjagtighed.

Men vi kan også gøre det omvendte, og spørge: Hvilken potens skal 10 opløftes til for at få 40?
Igen kan værktøjsprogrammet løse det:

$10^x = 40$ har løsningen $x = 1.602$, med 3 decimalers nøjagtighed

Dette tal kalder vi for *logaritmen til 40*, og det betegnes log(40)

Generelt er altså logaritmen til et positivt tal *y* løsningen til ligningen $10^x = y$

> **Definition: Titals logaritmen log**
>
> Givet et positivt tal *y*. Logaritmen til *y*, som skrives log(*y*), er løsningen til ligningen $10^x = y$:
>
> $10^x = y \Leftrightarrow x = \log(y)$ (*)
>
> Ved at udnytte (*) to gange får vi følgende:
>
> $10^{\log(y)} = y$ og $x = \log(10^x)$. (**)
>
> Funktionen log er således den omvendte funktion til funktionen 10^x .
>
> Vi udtrykker (**) kort ved at sige, at log og 10^x ophæver hinanden.

Bemærkning: Eksponentialfunktioner som 10^x giver kun positive værdier. Derfor er logaritmen kun defineret for positive tal.

Eksempel: Titalspotenser

1) $\log(1000) = 3$, fordi $10^3 = 1000$ 2) $\log(1) = 0$, fordi $10^0 = 1$

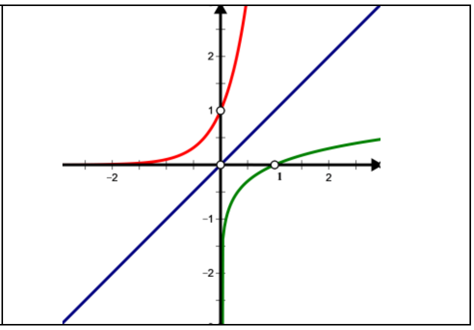
3) $\log(1000000) = 6$, fordi $10^6 = 1000000$ 4) $\log(\sqrt{10}) = \dfrac{1}{2}$, fordi $\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$

Eksempel: Graferne for de omvendte funktioner $\log(x)$ og 10^x

Log er den omvendte funktion til 10^x . Dvs. hvis vi starter på 2. aksen med et *y*, så finder vi $\log(y)$ på 1. aksen ved at gå vandret ud fra punktet *y* til vi rammer grafen, og derfra lodret ned til 1. aksen, hvor vi aflæser $\log(y)$. Det	

ISBN 9788770668279

betyder, at vi for logaritmefunktionerne har byttet om på, hvor den uafhængige og den afhængige variabel aflæses. Ønsker vi grafen for log præsenteret på sædvanlig vis med den uafhængige variabel ud af 1. aksen, kan vi blot spejle grafen for 10^x i linjen $y=x$, så 1. og 2. aksen bytter plads.



2. Den naturlige logaritmefunktion, $\ln(x)$ og den naturlige eksponentialfunktion e^x som omvendte funktioner

Under emnet differentialregning vil vi studere grafers forløb ved at se på tangenterne til grafen, og undersøge hvordan deres hældning varierer. Hældningen af en tangent måler, hvor hurtigt eller hvor langsomt den afhængige variabel vokser eller aftager, og det er en vigtig metode, at kunne bestemme sådanne hældninger. Det viser sig, at blandt eksponentialfunktionerne er der én, der udmærker sig som særlig betydningsfuld, og som ofte indgår i modeller over naturlige fænomener.

Den har fået sit eget navn, *Den naturlige eksponentialfunktion*, og sit eget symbol e^x. Af og til anvendes notationen: $\exp(x)=e^x$, men vi vil hovedsageligt bruge e^x.

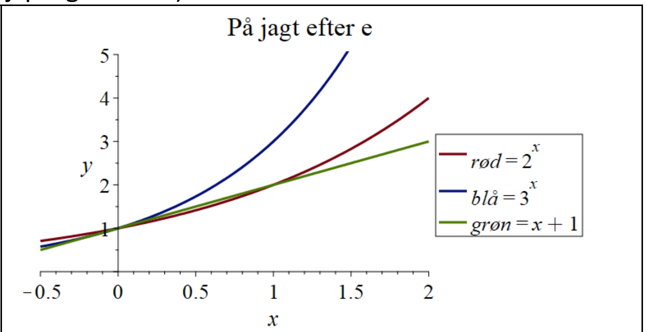
Definition: Den naturlige eksponentialfunktion
Den naturlige eksponentialfunktion e^x, er den funktion blandt alle eksponentialfunktioner, a^x, hvis graf har hældningen 1, hvor grafen skærer y-aksen

Tallet e

Øvelse 2 På jagt efter tallet e
Anvend dit værktøjsprogram til at gennemføre en eksperimentel undersøgelse af, hvilket tal e, der opfylder definitionen:

- Tegn grafen for funktionen $f(x)=a^x$ sammen med tangenten til grafen i punktet $(0,1)$. Parameteren a defineres med en skyder i dit værktøjsprogram. Tegn i samme koordinatsystem grafen for $x + 1$, der er den rette linje gennem $(0,1)$ med hældning 1. (Via **bogens website** kan du finde en vejledning i, hvordan man tegner tangenter til grafer i de gængse værktøjsprogrammer).

- Forsøg nu at bestemme tallet a så tangenten falder sammen med grafen for $l(x)$. Det tal, du bestemmer er en tilnærmelse til tallet e.
- Bestem tallet e med 10 cifre ved hjælp af dit værktøjsprogram.



Eksempel: Tallet e
Tallet e spiller en lige så fundamental rolle i matematik som tallet π. Det hedder *Eulers tal*, fordi Leonard Euler () var den første der anvendte symbolet e. Det sker i et af hans mest berømte værker fra 1748 (*Introductio*), som er en introduktion til infinitesimalregningen (differential og integralregning). Der er så ufatteligt meget i matematikkens verden, der er knyttet til Eulers navn, så man skal passe lidt på: *Eulers konstant* er fx et helt andet tal.
Euler var ikke den første, der havde opdaget, at der var et helt særligt tal inden for logaritmernes og eksponentialfunktionernes verden, som det var værd at få styr på.

Første gang, vi ser et forsøg på at bestemme tallet e, er hos John Napier, opfinderen af logaritmerne, der omtaler det i et tillæg til sine første logaritmetabeller fra 1618.
Den første der opstiller en korrekt formel for tallet e er faktisk slet ikke på jagt efter tallet, men efter formler til beregning af *renters rente*. Det var en af de berømte Bernouilli brødre, Jakob Bernouilli (), der i 1683 stiller sig den opgave at beregne tallet:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n$$

Det er ikke indlysende, at dette er et tal, men han viser at grænseværdien giver god mening, og at tallet ligger mellem 2 og 3!
I det omtalte værk af Euler viser han, at tallet e kan defineres på en række forskellige måde, og specielt at det kan opskrives som en sum og som en grænseværdi:

$$\mathrm{e}=1+\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}+\tfrac{1}{3!}+\tfrac{1}{4!}+\ldots+\tfrac{1}{n!}+\ldots=\sum_{i=0}^{\infty}\tfrac{1}{i!}\ ,\quad \text{hvor fx } 4!=4\cdot3\cdot2\cdot1$$

$$\mathrm{e}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n$$

Euler beregnede tallet e med 18 decimaler:

$$\mathrm{e}\ =2.718281828459045235$$

Tallet e er ligesom tallet π både *irrational*, dvs decimalerne gentages *ikke* efter en vis periode, og *transcendent*, dvs tallet er *ikke* rod i noget polynomium med hele tal som koefficienter.

Man taler inden for matematik om de 5 fundamentale konstanter:
0, 1, π, e og den imaginære enhed i (= $\sqrt{-1}$).
Disse er forbundet i den fantastiske formel, der har fået navnet *Eulers identitet*:

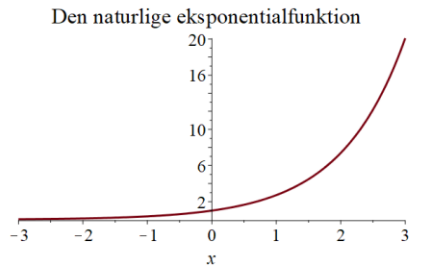
$$\mathrm{e}^{i\cdot\pi}+1=0$$

Den naturlige logaritmefunktion

Funktionen e^x er en monotont voksende funktion. Værdimængden er alle positive tal. Hvis vi spørger: Hvilken potens skal tallet e opløftes til for at få 15, så kan værktøjsprogrammet løse det:

$\mathrm{e}^x=15$ har løsningen $x=2.708$ med tre decimalers nøjagtighed.

Dette tal kaldes for *den naturlige logaritme* til 15, og det betegnes ln(15).
Generelt er $\ln(a)$ løsningen til ligningen: $\mathrm{e}^x=a$.
Løsningen findes altså ved at fjerne eksponentialfunktionen med *den omvendte operation* ln.



Definition: Den naturlige logaritme ln

Givet et positivt tal *y*. Den naturlige logaritme til *y*, der skrives ln(*y*), er løsningen til ligningen $\mathrm{e}^x=y$:

$$\mathrm{e}^x=y \Leftrightarrow x=\ln(y)\quad (*)$$

Ved at udnytte (*) to gange får vi følgende:

$$\mathrm{e}^{\ln(y)}=y\quad \text{og}\quad x=\ln(\mathrm{e}^x).\quad (**)$$

Funktionen ln er således *den omvendte funktion* til funktionen e^x .

Vi udtrykker (**) kort ved at sige, at ln og e^x ophæver hinanden.

Bemærkning: Eksponentialfunktioner som e^x giver kun positive værdier. Derfor er logaritmen kun defineret for positive tal.

ISBN 9788770668279

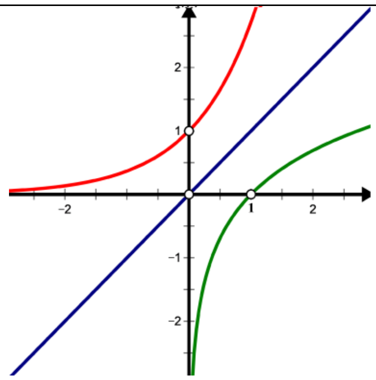
Øvelse 3 Ligningsløsning uden brug af solve, men med brug af ln og e^x

a) $2 \cdot \ln(3x-5) = 8$

b) $5.7 \cdot e^{0.08 \cdot x} = 1256$

Eksempel: Graferne for de omvendte funktioner $\ln(x)$ **og** e^x

Ln er den omvendte funktion til e^x. Dvs. hvis vi starter på 2. aksen med et *y*, så finder vi $\ln(y)$ på 1. aksen ved at gå vandret ud fra punktet *y* til vi rammer grafen, og derfra lodret ned til 1. aksen, hvor vi aflæser $\ln(y)$. Det betyder, at vi for logaritmefunktionerne har byttet om på, hvor den uafhængige og den afhængige variabel aflæses. Ønsker vi grafen for log præsenteret på sædvanlig vis med den uafhængige variabel ud af 1. aksen, kan vi blot spejle grafen for 10^x i linjen $y = x$, så 1. og 2. aksen bytter plads



3. Logaritmeregneregler

Sætning 1 Logaritmeregnereglerne
Lad a og b være positive tal, og x et vilkårligt tal.
Der gælder, da

1) $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ 1) $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

2) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$ 2) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

3) $\log(a^x) = x \cdot \log(a)$ 3) $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$

4) $\log\left(\sqrt[x]{a}\right) = \frac{1}{x} \cdot \log(a)$ 4) $\ln\left(\sqrt[x]{a}\right) = \frac{1}{x} \cdot \ln(a)$

5) $\log(10) = 1$ 5) $\ln(e) = 1$

Bevis for logaritmeregel 1:
Ifølge punkt 1 i definitionen gælder der, at
$a = 10^{\log(a)}$ og $b = 10^{\log(b)}$.
Vi indsætter dette i udtrykket på venstre side og omskriver:

$$\begin{aligned} \log(a \cdot b) &= \log\left(10^{\log(a)} \cdot 10^{\log(b)}\right) \\ &= \log\left(10^{\log(a)+\log(b)}\right) && \text{(potensregel)} \\ &= \log(a) + \log(b) && \text{(log og } 10^x \text{ ophæver hinanden)} \end{aligned}$$

ISBN 9788770668279

L&R Uddannelse EGMONT

Bevis for logaritmeregel 2:
Ifølge punkt 1 i definitionen gælder der, at
$a=10^{\log(a)}$ og $b=10^{\log(b)}$.
Vi indsætter dette i udtrykket på venstre side og omskriver

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a}{b}\right) &= \log\left(\frac{10^{\log(a)}}{10^{\log(b)}}\right) \\ &= \log\left(10^{\log(a)-\log(b)}\right) && \text{(potensregel)} \\ &= \log(a)-\log(b) && \text{(log og } 10^x \text{ ophæver hinanden)}\end{aligned}$$

Alternativt bevis for logaritmeregel 2:
Læg mærke til, at:

$$\frac{a}{b}\cdot b = a$$

Tag logaritmen på begge sider:

$$\log\left(\frac{a}{b}\cdot b\right)=\log(a)$$

Udnyt nu produktreglen fra 1) på venstre side:

$$\log\left(\frac{a}{b}\right)+\log(b)=\log(a)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$$

altså indholdet i formel 2.

Bevis for logaritmeregel 3:
Lad a være et positivt tal, og x et vilkårligt tal.
Igen indsætter vi $a=10^{\log(a)}$ i udtrykket på venstre side og omskriver:

$$\begin{aligned}\log\left(a^x\right) &= \log\left(\left(10^{\log(a)}\right)^x\right) \\ &= \log\left(10^{\log(a)\cdot x}\right) && \text{(potensregel)} \\ &= \log(a)\cdot x && \text{(log og } 10^x \text{ ophæver hinanden)} \\ &= x\cdot\log(a)\end{aligned}$$

ISBN 9788770668279

Bevis for logaritmeregel 4:

$\log(\sqrt[x]{a}) = \frac{1}{x} \cdot \log(a)$

Lad a være et positivt tal, og x et vilkårligt tal.

Igen indsætter vi $a = 10^{\log(a)}$ i udtrykket på venstre side og omskriver:

$$\log\left(\sqrt[x]{a}\right) = \log\left(a^{\frac{1}{x}}\right) \qquad \text{(potensregel)}$$

$$= \log\left(\left(10^{\log(a)}\right)^{\frac{1}{x}}\right) \qquad \text{(indsæt } a\text{)}$$

$$= \log\left(10^{\log(a)\cdot\frac{1}{x}}\right) \qquad \text{(potensregel)}$$

$$= \log(a) \cdot \frac{1}{x} \qquad \text{(log og } 10^x \text{ ophæver hinanden)}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \log(a)$$

Bevis for logaritmeregel 5:

Dette er faktisk en del af definitionen og kræver ikke som sådan et bevis. I definitionen indgår nemlig:

$x = \log(10^x)$

Sæt heri $x = 1$:

$1 = \log(10^1) = \log(10)$

Det er klart at reglerne for ln går præcis på samme måde.

Eksempel: Uendeligt mange logaritmefunkttioner

De to definitioner af logaritmefunktionerne $\log(x)$ og $\ln(x)$ er skrevet på en sådan måde, at det er let at se, at der er en logaritmefunktion $\log_a(x)$ til enhver eksponentialfunktion a^x. Prøv selv at opskrive en definition på fx logaritmefunktionen $\log_2(x)$, der hører sammen med 2^x.

Udregningerne i beviserne ovenfor byggede på potensregler og på definitionen af logaritmefunktionen. Beviserne kunne derfor gennemføres for alle logaritmefunktioner. Derfor:

Regnereglerne gælder for alle logaritmefunktioner, specielt også for den naturlige logaritmefunktion, ln.

I gymnasiet koncentrerer vi os om de to funktioner log og ln. Af og til skriver vi $\log_{10}(x)$ for $\log(x)$.

$\log(x)$ er voksende, men væksten er meget langsom:

Når vi bevæger os ud til $x = 100$ er log-funktionen nået op på 2.

Når vi bevæger os ud til 1 million er log-funktionen nået op på 6.

Øvelse 4 Log(x) går mod uendelig, når x går mod uendelig

a) Hvor langt skal vi ud af 1. aksen, før logaritmeværdien bliver 100?

b) Selv om $\log(x)$ vokser langsomt, kan logaritmeværdierne alligevel blive så stor, det skal være. Hvis vi har givet et stort tal K, hvor langt skal vi så bevæge os ud af 1. aksen, før der gælder $\log(x) > K$?

ISBN 9788770668279

L&R Uddannelse EGMONT

Øvelse 5 Log(x) går mod minus uendelig, når x går mod 0 – via generalisering

Dm(log) er de positive tal. Vi har ovenfor set på situationen med meget store tal, dvs hvor $x \to \infty$.
Hvad sker der, når vi vælger meget små positive tal, dvs når $x \to 0$?

a) Bestem tallet $\log(0{,}1)$ uden brug af værktøj. (Hint: $0{,}1 = 10^{-1}$, og udnyt regnereglerne)
b) Bestem tallet $\log(0{,}000001)$ uden brug af værktøj. (Hint: Skriv 0.000001 som en titalspotens)
c) Hvordan vil du generalisere a) og b)

Øvelse 6 Log(x) går mod minus uendelig, når x går mod 0 – via teoretisk bevis

a) Hvor tæt på 0 skal x-værdierne ligge, før logaritmefunktionen kommer under -10?

b) Givet et stort negativt tal: $-K$.

Hvor tæt på 0 skal x-værdierne ligge, før logaritmefunktionen kommer under $-K$?

Resultaterne af de foregående øvelser sammenfattes i

Sætning 2 Log-funktionens asymptotiske egenskaber
Når x nærmer sig 0 vil $\log(x)$ bevæge sig mod $-\infty$.
2. aksen er en lodret asymptote til grafen for log.

Bemærkning: Overvej, at vi i sætningen kan udskifte log med ln.

4. Sammenhængen mellem a^x og $e^{k \cdot x}$

I kapitel 4 blev eksponentialfunktionerne introduceret med regneforskriften $y = b \cdot a^x$. I mange andre fag og i videregående matematik foretrækker man ofte at skrive regneforskriften således: $y = b \cdot e^{k \cdot x}$.

Men hvad er sammenhængen mellem a^x og $e^{k \cdot x}$? Der gælder følgende:

Sætning 3 Omskrivning mellem a^x og $e^{k \cdot x}$
1) $y = b \cdot e^{k \cdot x}$ kan omskrives til formen $y = b \cdot a^x$, ved at sætte $a = e^k$.
2) $y = b \cdot a^x$ kan omskrives til formen $y = b \cdot e^{k \cdot x}$ ved at sætte $k = \ln(a)$.

Bevis for 1)

Regneforskriften er givet på formen $y = b \cdot e^{k \cdot x}$.

Vi ønsker at omskrive til formen $y = b \cdot a^x$

$e^{k \cdot x} = \left(e^k\right)^x$ vi udnytter en af potensreglerne

$e^{k \cdot x} = \left(e^k\right)^x = a^x$ Vi kalder e^k for a

Med denne værdi af a har vi således fået omskrevet til formen $y = b \cdot a^x$

ISBN 9788770668279

L&R Uddannelse EGMONT

Bevis for 2)

Regneforskriften er givet på formen $y = b \cdot a^x$

Vi ønsker at omskrive til formen $y = b \cdot e^{k \cdot x}$

$e^k = a$	Ligningen opstilles inspireret af det foregående
$\ln(e^k) = \ln(a)$	Vi anvender ln for at ophæve eksponentialfunktionen
$k = \ln(a)$	$\ln(x)$ og e^x ophæver hinanden

Med denne værdi af k er $a = e^k$, og derfor er $y = b \cdot a^x = b \cdot (e^k)^x = b \cdot e^{k \cdot x}$, hvad vi ønskede.

Eksempel: Omskrivning fra $y = e^{k \cdot x}$ til $y = a^x$

En funktion har forskriften $y = e^{0,35x}$. Omskriv til formen: $y = a^x$.

$a = e^{0,35} = 1,419$	Udnyt sætning 5

Konklusion: Vi kan omskrive forskriften til $y = 1,419^x$.

Eksempel: Omskrivning fra $y = a^x$ til $y = e^{k \cdot x}$

En funktion har forskriften $y = 0,892^x$. Omskriv til formen: $y = e^{k \cdot x}$.

$e^k = 0,892$	Udnyt sætning 5
$\ln(e^k) = \ln(0,892)$	Vi anvender ln for at ophæve eksponentialfunktionen
$k = \ln(0,892) = -0,114$	$\ln(x)$ og e^x ophæver hinanden

Konklusion: Vi kan omskrive forskriften til $y = e^{-0,114 \cdot x}$.

Øvelse 7

Omskriv:

1. $y = 4,1 \cdot 1,29^x$ til formen: $y = 4,1 \cdot e^{k \cdot x}$
2. $y = 0,69 \cdot e^{-0,821 \cdot t}$ til formen: $y = 0,69 \cdot a^t$