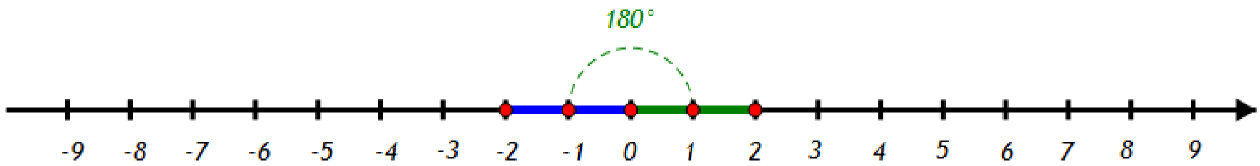
ISBN 9788770668279

Projekt 6.3 Caspar Wessel indførelse af komplekse tal

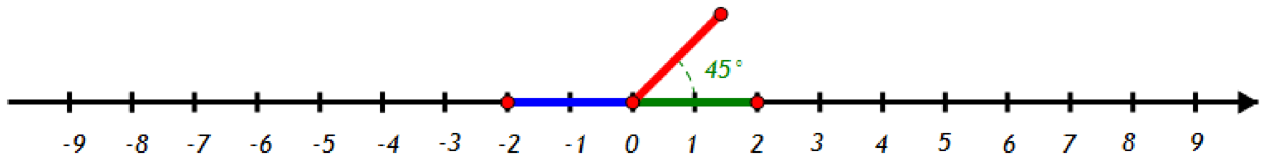
Et af de helt store videnskabelige projekter i 1700-tallets Danmark var kortlægningen af Danmark. Projektet blev varetaget af Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab og løb over en periode på et halvt århundrede fra omkring 1757.
I 1768 ansætter selskabet Caspar Wessel som geodætisk assistent, og det var i den forbindelse han beskrev nødvendigheden af at udvide talrækken med det, som vi i dag kalder "de komplekse tal".

Caspar Wessel beskriver sin teori i afhandlingen "*Om Directionens analytiske Betegning, et Forøg, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Opløsning*", der blev indleveret til Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab i 1797. Originaludgaven (gotisk skrift) findes på det norske Nasjonalbiblioteket i Oslo. Du kan se den **her**. Er man ikke trænet i at læse gotisk skrift, kan det være lidt svært at stave sig igennem. En oversættelse i uddrag til læseligt dansk findes **her** og en oversættelse til engelsk med tilhørende omfattende kommentarer og artikler findes **her.**
Caspar Wessel stillede sig den opgave, at regne med linjestykker, der har en retning og ikke kun en længde.

Hvis vi ser på en tallinje, så kan vi betragte tallet +2, som det linjestykke, der har længden 2 og retningen 0°, mens -2 kan betragtes som det linjestykke, der har længden 2 og retningen 180°, som vist på figuren.



Men hvad med det linjestykke som har længden 2 og retningen 45°?



Caspar Wessel havde jo brug for at kunne dreje linjestykker i alle mulige retninger i sine trianguleringer. Han havde brug for at kunne udføre de sædvanlige regneoperationer med linjestykker, som om de var tal, og han indførte derfor en slags todimensionale tal bestemt ved en længde og en retning. Disse tal svarer til det, vi i dag kalder "de komplekse tal". Bemærk, at der er tale om en udvidelse af de reelle tal og ikke et nyt talsystem, fordi de reelle tal jo bare svarer til alle de komplekse tal, der har retningen 0° eller 180°.
Caspar Wessel beskriver addition af disse todimensionale tal geometrisk (se s. 9 i " Om Directionens analytiske Betegning…"):

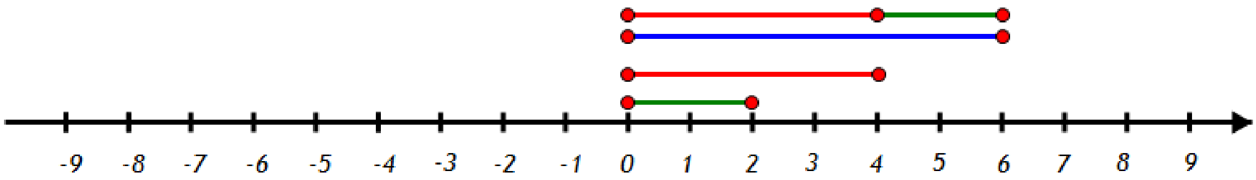
"To rette linjer adderes, naa man først føier dem sammen, saaledes at den ene begynder, hvor den anden slipper, derefter drager fra de sammenføiedes første til sidste Punct en ret Linje og antager saa denne for de sammenføiedes Sum."

ISBN 9788770668279

Øvelse 1

Omskriv Caspar Wessels formulering til naturligt sprog.

På figuren nedenfor ses tallene 2 (blå) og 4 (rød), som har længden 2 hhv. 4 og begge retningen 0°. Summen $2+4$ er så bestemt ved det linjestykke (blå), der går fra det første linjestykkes startpunkt til det andet linjestykkes slutpunkt (linjestykkerne lægges altså blot i forlængelse af hinanden), og vi får en linjestykke med længde 6 og retning 0°, dvs. retningen bevares, mens længden bliver summen af de to tals længder:

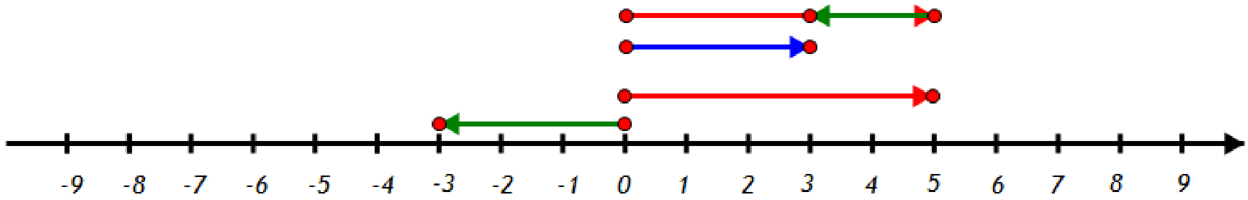


Øvelse 2

Udfør følgende additionerne $1+4$ og $3+5$ efter Caspar Wessels metode, idet du konstruerer tallene (linjestykkerne) og summen i et dynamisk geometriprogram (eller på et stykke kvadreret papir).

Øvelse 3

Subtraktion beskriver Caspar Wessel som en naturlig forlængelse af addition s. 9 i "Om Directionens analytiske Betegning…".
Find selv afsnittet og omformuler til almindeligt sprog, og forklar hvordan subtraktionen $5-3$ kan illustreres således, idet vi konstruerer linjestykkerne med pile, der viser tallets retning:



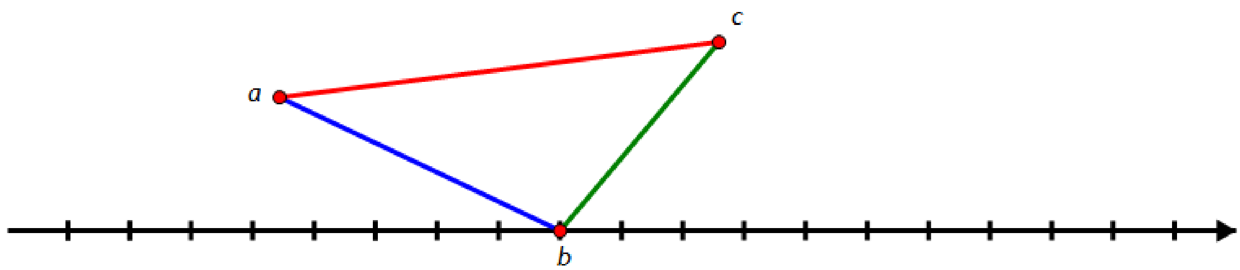
Men hvad så med tal, der har en anden retning end 0° og 180°?

Øvelse 4

Caspar Wessel beskriver i disse tilfælde summen ved hjælp at en trekant:

"Ligeledes naar en Triangels ene Side strækker sig fra a til b, og den anden fra b til c, maa den tredje fra a til c og $ab+bc$ *have samme Betydning, eller* $ac=ab+bc=-ba+bc$*, dersom ba er det modsatte af ab."*

Benyt nedenstående figur (eller konstruer en selv) til at forklare ovenstående:



ISBN 9788770668279

Øvelse 5
Længere nede i afsnittet skriver Caspar Wessel om betydningen af tegnet "+" i hans teori.

Find dette afsnit, og forklar hans beregning: $ab+\frac{ba}{2}=\frac{1}{2}ab$.

Øvelse 6
Når der er tale om en udvidelse af de reelle tal, så skal alle de sædvanlige regneregler jo gælde. Dvs. når man lægger tal sammen, så skal rækkefølgen være lige gyldig: $ab+bc=bc+ab$.

a) Vis ved konstruktion i et dynamisk geometriprogram, at dette gælder, når addition beskrives som ovenfor: Konstruer to tal (linjestykker) som på figuren ovenfor med en tilfældig længde og retning, idet de lægges i forlængelse af hinanden på to forskellige måder $ab+bc$ og $bc+ab$, og vis at $ac=ab+bc=bc+ab$.

Man skal jo også kunne lægge flere tal sammen uden at tage hensyn til rækkefølgen.

b) Konstruer en firkant *abcd* og argumenter for, at $ad=(ab+bc)+cd=ab+(bc+cd)$.

Da subtraktion jo bare er et specialtilfælde af addition gik Caspar Wessel hurtigt hen over dette.

Multiplikation af to tal var en noget større udfordring for Caspar Wessel. For overskuelighedens skyld vil vi nu benytte en anden notation, og lade *z* og *w* være to komplekse tal. Resultatet af multiplikationen $z \times w$ bestemte han som det linjestykke, hvis længde svarer til de to linjestykkers længder ganget sammen og, hvis retning svarer til de to linjestykkers retninger lagt sammen:

Øvelse 7
Benyt et dynamisk geometriprogram til at konstruere eksempler på Caspar Wessels multiplikation:

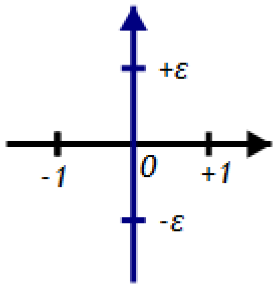
a) Konstruer to tal (linjestykker) *z* og *w* med samme startpunkt og med tilfældig længde og retning.
b) Mål hver af de to tals længde og retning.
c) Konstruer nu summen af de to tal: $z+w$, dvs. et linjestykke med længden svarende til de to linjestykkers længde ganget sammen og en retning svarende til summen af de to linjestykkers retninger.
d) Benyt din konstruktion til at udføre beregninger svarende til at gange to tal (linjestykker med retning) sammen, idet du ændrer på længde og retning af de to tal (linjestykker) *z* og *w*.

ISBN 9788770668279

Caspar Wessels næste udfordring var at generalisere den geometriske beskrivelse til en algebraisk beskrivelse, dvs. han skulle beskrive et algebraisk udtryk for et komplekst tal med en vilkårlig længde.
Han beskrev dette i 3 trin:

1. Indførelse af en ny enhed
2. Algebraisk udtryk for et komplekst tal med længden 1
3. Algebraisk udtryk for et komplekst tal med vilkårlig længde

Ad 1.
Caspar Wessel indfører en ny enhed $+\varepsilon$, som skal måle udstrækning vinkelret på den sædvanlige tallinje:



Hermed får tallet +1 retningen 0° og tallet $-\varepsilon$ får retningen -90°.

Øvelse 8
Hvad bliver retningen for tallene -1 og $+\varepsilon$?

Øvelse 9
Med udgangspunkt i beskrivelsen af multiplikation, angiver Caspar Wessel så retningerne af produkterne af enhederne. Udfyld resten af tabellen nedenfor:

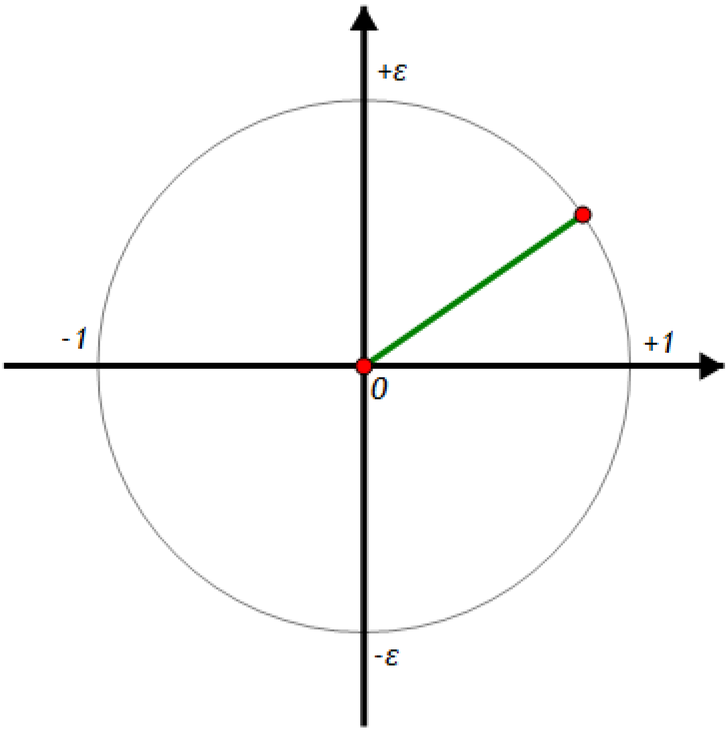
Produkt	**Samme retning som tallet :**	**Forklaring**
$(+1)\cdot(+1)$	$+1$	$0^\circ+0^\circ=0^\circ$
$(+1)\cdot(-1)$		
$(-1)\cdot(-1)$		
$(+1)\cdot(+\varepsilon)$	$+\varepsilon$	$0^\circ+90^\circ=90^\circ$
$(+1)\cdot(-\varepsilon)$		
$(-1)\cdot(+\varepsilon)$		
$(-1)\cdot(-\varepsilon)$		
$(+\varepsilon)\cdot(+\varepsilon)$	-1	$90^\circ+90^\circ=180^\circ$
$(+\varepsilon)\cdot(-\varepsilon)$		
$(-\varepsilon)\cdot(-\varepsilon)$		

Heraf konkluderer Caspar Wessel så det helt særlige, at $\varepsilon=\sqrt{-1}$, fordi der ifølge tabellen gælder at $\varepsilon^2=-1$.

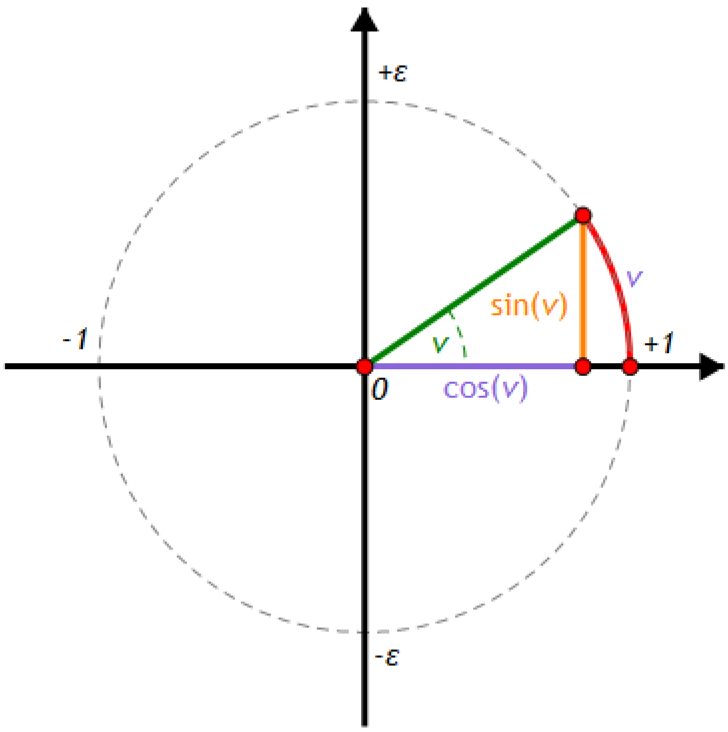
ISBN 9788770668279

Ad 2)

For at beskrive et komplekst tal med længden 1 med et udtryk, hvori den nye enhed indgår, benytter Caspar Wessel en enhedscirkel. Han lader det komplekse tal være linjestykket, der går fra cirklens centrum ud til cirklens periferi, hvorved det sikres at tallet har længden 1:



Han indfører herefter cosinus og sinus til en buelængde (som vi kender det for den tilsvarende centervinkel), som de tal (linjestykker), der er vist på figuren:



L&R Uddannelse EGMONT

Øvelse 10

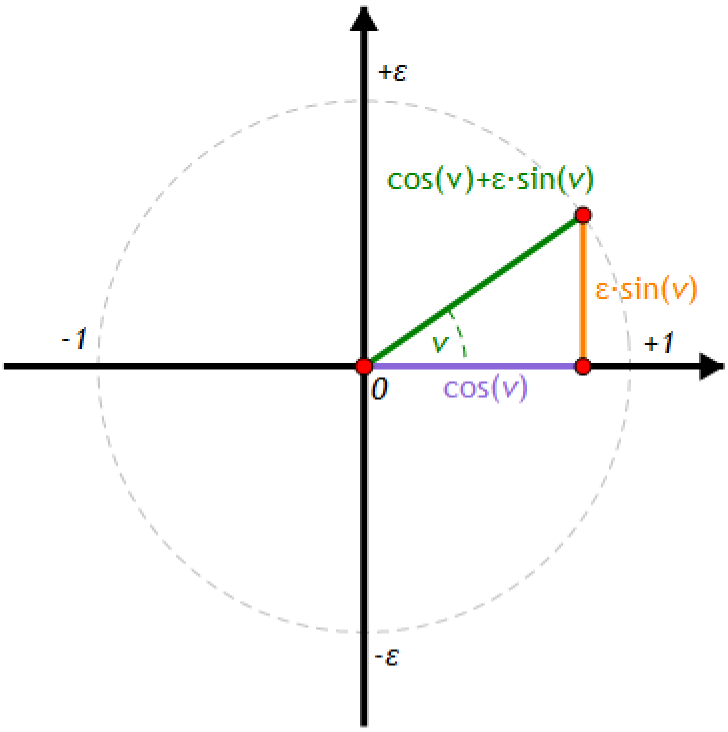
Vis ved hjælp af enhedscirklen og tabellen ovenfor, at der må gælde, at $\sin(90°) = \sqrt{-1}$.

Han lader så v betegne en given vinkel og betragter tallet (linjestykket) med længden svarende til $\sin(v)$ og retningen $0°$. Tallet ε er jo det komplekse tal med længde 1 og retning $90°$, og derud fra danner han tallet $\varepsilon \cdot \sin(v)$, som jo er et produkt af de to komplekse tal $\sin(v)$ og ε. Tallet $\varepsilon \cdot \sin(v)$ får da retningen $90°$ og længden $\sin(v)$, og det beskriver således sinus til vinklen v både mht. længde og retning.

Øvelse 11

Vis ved anvendelse af Caspar Wessels multiplikation, at tallet $\varepsilon \cdot \sin(v)$ får retningen $90°$ og længden $\sin(v)$.

Han får således beskrevet et vilkårligt komplekst tal med længden 1 og retning v ved summen $\cos(v) + \varepsilon \cdot \sin(v)$:



Øvelse 12

a) Forklar ved hjælp af Caspar Wessels addition, hvordan summen $\cos(v) + \varepsilon \cdot \sin(v)$ fremkommer.

Lad nu et andet komplekst tal med længden 1 og retningen u være beskrevet ved $\cos(u) + \varepsilon \cdot \sin(u)$.

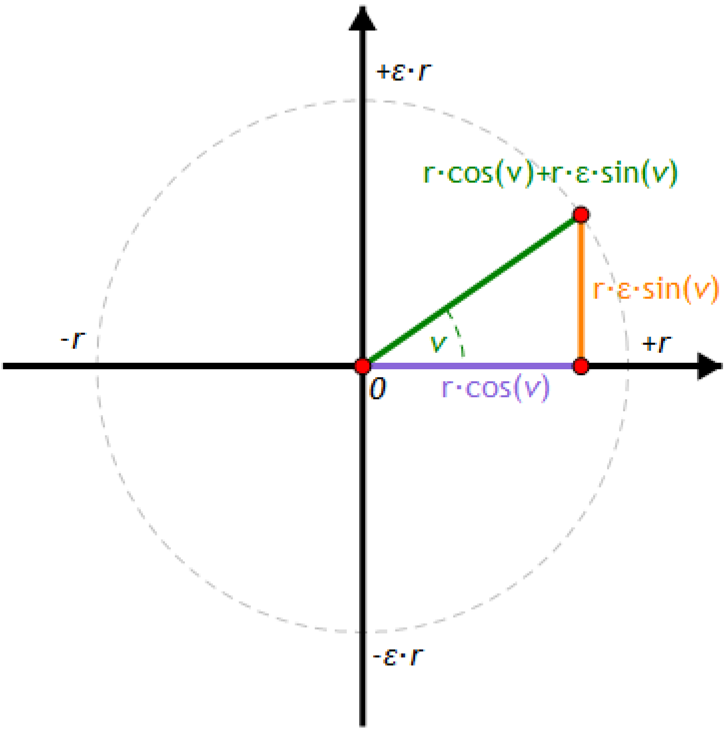
c) Hvad bliver så længden og retningen for produktet ad de to tal: $\left(\cos(v) + \varepsilon \cdot \sin(v)\right) \cdot \left(\cos(u) + \varepsilon \cdot \sin(u)\right)$?

Ad 3)

Han mangler nu bare en algebraisk beskrivelse af et komplekst tal med en vilkårlig længde.

Han tager udgangspunkt i tallet $\cos(v) + \varepsilon \cdot \sin(v)$, som jo svarer til en radius (linjestykke), som danner en vinkel på v med den positive reelle akse. Han slutter deraf, at tallet $r \cdot \cos(v) + r \cdot \varepsilon \cdot \sin(v)$ må beskrive en radius (linjestykke), som danner en vinkel på v med den positive reelle akse i en cirkel med radius r, fordi når kateterne i en retvinklet trekant bliver r større, så bliver hypotenusen også r større, mens vinklerne bevares:

ISBN 9788770668279



Øvelse 13
Hvordan kan du argumentere for, at "når kateterne i en retvinklet trekant bliver r større, så bliver hypotenusen også r større, mens vinklerne bevares"?

Hermed har han beskrevet et vilkårligt komplekst tal med et algebraisk udtryk.

Herefter viser han, at man kan gange to komplekse tal på formen $a+\varepsilon\cdot b$, ligesom vi normal ganger flerleddede parenteser sammen, når vi regner med reelle tal.

Øvelse 14
a) Læs første afsnit af §10 s. 14, og opskriv sætningen i naturligt sprog. Benyt følgende gloseliste:
Directe Linjer: Komplekse tal med retning $0°$.
Indirecte Linjer: Komplekse tal med retning forskellig fra $0°$.
Den absolute Unitet: Enheden på den reelle akse.
Afvigning fra den absolute Unitet: Retningen af tallet (målt i forhold til den reelle akse).

I andet afsnit gennemføres beviset ved brug af nogle særlige egenskaber ved sinus og cosinus, som er ret abstrakte.

b) Vis i stedet, at Caspar Wessels faktisk har ret, idet du udregner

$$(a+\varepsilon\cdot b)\cdot(c+\varepsilon\cdot d)=ac-bd+\varepsilon\cdot(ad+bc)$$

ved blot at gange parenteserne sammen, som der var tale om reelle tal, og udnytte, at $\varepsilon^2=-1$.