ISBN 9788770668279

Projekt 6.2. Om Caspar Wessels opdagelse af de komplekse tal

Læs nedenstående kronik og besvar undervejs nedenstående spørgsmål. Spørgsmål og svar skal danne grundlag for udarbejdelse af et manuskript til en skærmoptagelsessekvens, hvor du præsenterer spørgsmål og svar mundtligt samtidigt med, at du viser relevant billedmateriale mv i en præsentation (powerpoint, prezi, glogsteretc). Til skærmoptagelsen kan fx anvendes CamStudio, Screencast-o-matic, Jing el. lign.

a) Hvorfor må tal anses for at være en kulturel frembringelse?
b) Hvad forstår man ved tælletallene? Hvori bestod deres utilstrækkelighed?
c) Giv praktiske eksempler på, hvorfor man fandt det nødvendigt at udvide de hele tal med de rationale tal.
d) Hvad forstår man ved de reelle tal?
e) Hvem var Caspar Wessel? Hvad arbejdede han med?
f) Giv en kort beskrivelse af den tid han levede i (opslysningstiden).
g) Hvordan beskrives Caspar Wessels personlighed?
h) Hvad var det særlige ved Caspar Wessels beregningsmetode? Hvad var problemet i forhold til de reelle tal?
i) Hvordan beskrives tallene i Caspar Wessels talplan? Tegn gerne en skitse.
j) Hvordan beskriver Caspar Wessel multiplikation? Vis gerne et eksempel.
k) Et af de nye tal har en særlig betydning. Hvilket tal er der tale om? Hvorfor er det særligt interessant?
l) Hvorfor blev Caspar Wessels beskrivelse af de komplekse tal aldrig rigtig udbredt?
m) Hvem fik senere æren for opdagelsen af de komplekse tal?

KRONIKEN I POLITIKEN / *Torsdag 8. juni 1995*

Lillebrors komplekse tal

Af JØRGEN EBERT

Den dansk-norske landmåler Caspar Wessel er mindre kendt end sin storebror Johan Herman. Men han opdagede grundlaget for moderne matematik. I dag fylder han 250 år. Jørgen Ebert er lektor, cand. scient.

TALLENE er alle tings væsen, sagde Pythagoras. Han mente, at vejen til sjælens frigørelse lå i et studium af de talmæssige forhold, som gør naturen til et harmonisk kosmos. Selv om vi nu, omkring 2500 år senere, nok ikke ville udtrykke os helt på denne måde, må vi indrømme, at tallene spiller en væsentlig rolle for vores forståelse af verden. Og vi har opnået så stor fortrolighed med dem, at vi er tilbøjelige til at betragte dem som evige og naturgivne. Men den opfattelse er forkert.

Ideen om tallene er skabt af mennesker, som gennem årtusinder har forbedret regnekunsten. Den mest betydningsfulde drivkraft har været de skiftende kulturers forsøg på at forklare naturens forskelligartede fænomener som for eksempel årstidernes rytme og månens bevægelser. Men også rent praktiske gøremål har inspireret. Oldtidsbonden har haft brug for at holde styr på antallet af husdyr, og søfareren behøvede en vis form for navigation.

Alle disse aktiviteter involverede beregninger, som blev mere og mere avancerede i takt med naturvidenskabernes udvikling. Når kravene til tallenes anvendelighed steg, måtte man udvide og forbedre forældede talsystemer. Tallene bør derfor betragtes som en kulturel frembringelse, der har været undervejs, siden de første civilisationer opstod.

ISBN 9788770668279

DE MEST primitive tal er tælletallene, 1, 2, 3, ..., som er gode nok, såfremt man kun har brug for at lægge sammen. Hvis en oldtidsbonde med 3 geder sælger sin kønne datter for 5 geder, har han 8 geder. Så længe der er overskud, går det godt. Men hvad nu, hvis han køber en vogn af smeden for 10 geder, hvor mange geder har han så tilbage? Det kan man faktisk ikke svare på, hvis man kun kender tælletallene. Derfor var man nødt til at skabe nogle nye tal, som kunne bruges, når regnskabet viste underskud. På den måde opstod nul og de negative tal.

Sådan er det gået gang på gang. Når man har opdaget mangler ved tallene, har man udvidet talbegrebet. For at kunne dividere var man nødt til at opfinde brøkerne, og for at beregne længden af alle liniestykker var man nødt til at udvide endnu engang ved at tilføje de såkaldte irrationale tal. På denne måde kom man omsider frem til de *reelle tal*, som er dem, man lærer om i skolen.

Man forestiller sig, at de ligger ordnet efter størrelse på en uendelig lang lineal, *talaksen*, med de negative tal til venstre for nul og de positive til højre. Til hvert eneste punkt på talaksen svarer et tal, og der er ikke plads til flere.

Alligevel formåede den dansk-norske landmåler *Caspar Wessel*, 1745-1818, at trække udviklingen et vigtigt skridt videre og dermed sætte det sidste punktum i tallenes udviklingshistorie. De tal, Caspar Wessel fremstillede, kaldes de *komplekse tal*. De er de mest avancerede, man nogen sinde kommer til at operere med. Talbegrebet kan ikke udvides yderligere uden tilsidesættelse af de sædvanlige regneregler. Til daglig har man ikke brug for de komplekse tal, og man lærer normalt ikke om dem i skolen. Men nutidens matematikere og fysikere ville ikke kunne undvære dem.

IDEEN om de nye tal er et eksempel på den nytænkning, som prægede den vestlige verden i sidste halvdel af 1700-tallet, *oplysningstiden*.

Baggrunden var blandt andet, at naturvidenskaben flere gange gennem de sidste par hundrede år havde demonstreret, at den var i stand til at forklare nogle af naturens fænomener ud fra almengyldige naturlove. For eksempel gav Newtons love en forklaring på, hvorledes planeterne blev fastholdt i deres baner omkring solen. Sådanne resultater var med til at bane vejen for oplysningstanken, hvis hovedidé var, at det måtte være muligt at frigøre sig fra de gamle forudfattede meninger. Alene ved brug af den sunde fornuft ville man finde de objektive sandheder.

Disse strømninger nåede også Danmark. Forud lå næsten hundrede års enevælde præget af blind lydighed over for godsejeren, kongemagten og den lutherske ortodoksi. Størstedelen af befolkningen var stavnsbundne bønder, som passede arbejdet på fæstegården og hoveripligten på godset. Den almindelige holdning var, at hvad den lille katekismus ikke kunne forklare, skulle man ikke spekulere over.

Holberg har i sine komedier beskrevet sammenstødet mellem dette gamle bondesamfund og den nye oplysningstanke. I *Erasmus Montanus*, som havde premiere i 1747, påstår Jesper Ridefoged, at måneformørkelser varsler ulykke på Jorden. Men han modsiges af den unge, diskussionslystne og i øvrigt ret irriterende student, Erasmus: *Det gaaraltsammen naturlig viis til, thi man kan udregne Formørkelser*.

I udlandet kulminerede oplysningstiden med den franske revolutions kontante krav om menneskerettigheder, frihed og lighed. I Danmark kom det ikke til så blodige opgør. Men Caspar Wessel har dog været vidne til en lang række reformer af lignende natur, blandt andet censurens ophævelse, forbud mod slavehandel, gennemførelse af landboreformer og stavnsbåndets opløsning.

Caspar Wessel blev født den 8. juni 1745 i Norge, som på den tid var en del af det dansk-norske rigsfællesskab. At efternavnet lyder bekendt skyldes dels hans grandonkel, søhelten Peter Wessel, som bar adelsnavnet Tordenskiold, og dels hans bror, digteren Johan Herman Wessel.

Som 13-årig forlod Caspar Wessel fødestedet Jonsrud på østsiden af Oslo Fjord for at følge undervisningen ved katedralskolen i Christiania (Oslo). Herfra dimitterede han som 18-årig student og tog til København, hvor han begyndte at læse jura. Men der gik 15 år, før han bestod latinsk juridisk embedseksamen.

Den lange studietid skyldtes økonomiske vanskeligheder, som forfulgte ham gennem hele livet. For overhovedet at overleve, måtte Caspar Wessel, lige som nutidens unge, søge arbejde ved siden af studierne.

Allerede året efter sin ankomst til hovedstaden blev han antaget af Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab som geodætisk assistent. Selskabet varetog blandt andet den storstilede trigonometriske opmåling og kortlægning af hele landet, som var indledt nogle få år forinden, og som kom til at strække sig over godt og vel et halvt århundrede.

Korttegningen blev Caspar Wessels livsgerning. Han høstede megen anerkendelse for sit omhyggelige arbejde, avancerede hurtigt og opnåede sluttelig kongelig bestalling med titel af landmålingsinspektør. Hans storebror, Johan Herman Wessel, som var af en ganske anden natur, skrev om ham:

> *Han tegner Landkort og læser Loven. / Han er saa flittig, som jeg er doven*.

At han virkelig har været flittig fremgår også af Caspar Wessels egen levnedsbeskrivelse fra 1815, hvori han blandt andet fortæller, hvad han lavede i sin studietid:

> *I den Tid fra 1768 til 1779 har jeg tegnet de 4 Fjerdedele af Sjelland, den østlige Halvdel af det generaleSjellandskeKaart, og Kaartet over den nordlige Del af Fyen, samt, foruden nogle enkelte Dele af Sjelland, opmaalt den østlige Halvdel af Fyen*.

Ofte klarede han det store opmålingsarbejde helt alene, selv om Videnskabernes Selskab gav ham penge med til betaling af lokal arbejdskraft. I et brev vedlagt et af sine nytegnede kort bad Caspar Wessel lederen af den danske opmåling, professor Thomas Bugge, om tilladelse til at beholde disse penge selv:

> *Jeg tager mig herved den Friehed at tilsende Deres Velbyrdighed mit Kort, og ynsker at det maatte finde Deres Biefald. Af Titelen kan sees at det er forfærdiget paa den Maade, at jeg ingen Dagleyere har haft fornøden at bruge.*
> *Jeg burde altsaa udbetale de Penge, som jeg til den Brug har oppebæret; men jeg stoler paa at Hr. Justitsraaden nu ligesom tilforn har den Godhed at eftergive mig denne Gield.*
> *I mine yngre Aar var min Gage saa liden, at jeg umuelig kunde leve deraf, og den Gield jeg den Gang paadrog mig, stræber jeg nu at betale, inden jeg afgaaer*.

Det hårde arbejde gik alvorligt ud over hans helbred. Den ovenfor nævnte levnedsbeskrivelse slutter således:

> *1812 blev jeg af Gigt saa svag, at jeg næppe kunde gaae, men Etatsraad Rosenvinge og hans Familie, som jeg er saa forbunden for deres mange beviste Velgjerninger, overtalede mig til at flytte ind til dem, og der blev jeg ved bedre Pleje, Lægemidlers Anskaffelse, og ved Etatsraad Bangs Hjelp, saavidt helbredt, at jeg til Nød i dette Foraar kunde tegne et trigonometrisk Skelet til de 4 ej endnu udgivne Kaarter over Holsten*.

I 1815, tre år før sin død, modtog Caspar Wessel ridderkorset som belønning for sit trofaste arbejde med kortmålingen i Danmark. Men de økonomiske vanskeligheder fik han aldrig bugt med. De blev tværtimod forstærket af inflationen under napoleonskrigen og den efterfølgende statsbankerot i 1813.

Caspar Wessel døde forarmet og gigtplaget i en alder af 72 år. Begravelsen og huslejerestancen beløb sig til 159 rigsdaler og 9 skilling, som kreditorerne forsøgte at inddrive hos familien i Norge.

ARBEJDET som landmåler bragte Caspar Wessel i tæt kontakt med matematiske problemstillinger. En landmålers opgave er at opmåle længder og vinkler i landskabet og derefter udregne den nøjagtige placering af landskabets enkelte dele i et gradnet. Der er altså tale om geometriske beregninger, hvis bestanddele er rette liniestykker med forskellige længder og retninger.

Caspar Wessel regnede liniestykker med fortegn. Hvis AB betegner et liniestykke, som går fra punkt A til punkt B, så er -AB det samme liniestykke blot med modsat retning. Liniestykkerne 3AB og -3AB er begge tre gange så lange som AB, men de er rettet hver sin vej.

ISBN 9788770668279

Det ses, at man kan forandre et liniestykkes længde og retning ved at gange det med et passende tal. Men det ses også, at man med denne form for linieregning kun kan ændre et liniestykkes retning til den modsatte. Man kan altså dreje et liniestykke 180° ved at gange det med et negativt tal, men man kan ikke på samme måde dreje det for eksempel 45°. Begrænsningen skyldes naturligvis, at der foruden nul kun findes positive og negative tal.

Denne erkendelse af tallenes utilstrækkelighed gav Caspar Wessel ideen til at udvide den almindelige opfattelse af talbegrebet. Og det lykkedes ham virkelig at finde nogle nye tal, de såkaldte komplekse tal, som er mere righoldige end de sædvanlige.

De sædvanlige reelle tal ligger som nævnt ordnet efter størrelse på talaksen. De positive tal ligger til højre for nul, og de negative til venstre. Hvis tallene opfattes som liniestykker, der udgår fra nul, kan man sige, at 3 har længden 3 og retningen 0°. På samme måde kan tallet -3 beskrives som det tal, der har længden 3 og retningen 180°.

Caspar Wessels idé var at slippe tallene løs. I stedet for at begrænse dem til kun to retninger, tillod han alle mulige retninger. På den måde kom tallene til at fylde ikke bare en talakse men en hel *talplan*.Talplanen er som et uendeligt stykke papir, hvorpå den reelle talakse er tegnet. På talaksen ligger alle de gamle tal, og uden for talaksen finder man de nye. Tallene er liniestykker, som udgår fra nul, og som er karakteriseret ved en længde og en retning.

Da Caspar Wessel fastsatte regnereglerne for disse nye tal, tog han udgangspunkt i de gamle tals regneregler, som han formulerede så fikst, at de umiddelbart lod sig overføre til de nye tal. For eksempel bemærkede han, at man ganger to tal med hinanden ved at gange de to tals længder og addere deres retninger.

Lad os prøve at gange 2 med -3 efter denne opskrift. Produktet af de to tals længder er $2\cdot3$, og summen af deres retninger er $0°+180°$.Resultatet er altså det tal, som har længden 6 og retningen 180°. Men dette tal er jo -6. Altså er $2\cdot(-3)$ lig med -6, hvilket stemmer med den sædvanlige regning.

Der er ét af de nye tal, som har en ganske særlig interesse. Det er det tal, som har længden 1 og retningen 90°. Caspar Wessel kaldte dette tal for *epsilon*. Det er hverken positivt (retning 0°) eller negativt (retning 180°) men en besynderlig mellemting.
Når man ganger *epsilon* med sig selv, skal man gange dets længde med sig selv og addere dets retning med sig selv. Længdernes produkt er $1\cdot1$, og retningernes sum er $90° + 90°$.Resultatet er altså det tal, som har længden 1 og retningen 180°. Men dette tal er jo -1.

CASPAR WESSEL har hermed som den første i verden fundet et tal, som giver -1, når man ganger det med sig selv. Det betyder, at han har fundet kvadratroden af -1. I skolen lærer man ellers, at man ikke kan tage kvadratroden af negative tal. Men denne begrænsning gælder altså ikke for de nye komplekse tal.

Når man regner med de komplekse tal, løber man ikke så ofte ind i umulige operationer som tilfældet er med de gamle reelle tal. Derved kan de matematiske teorier forenkles og formuleres mere klart. At man uden forbehold kan uddrage kvadratroden af vilkårlige tal, er blot et enkelt eksempel på denne forenkling. Også i mere praktiske beregninger er de komplekse tal uundværlige. For eksempel bruges de af svagstrømsingeniørerne ved beregning af elektroniske kredsløb.

I 1796 samlede Caspar Wessel sine resultater i en afhandling på et halvt hundrede sider, som året efter blev forelagt Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab. I 1799 blev afhandlingen trykt i Videnskabernes Selskabs Skrifter.Den matematiske kvalitet er beundringsværdig, også set med nutidens øjne. Den er resultatet af en midaldrende landmålers store interesse for sit fag.

ISBN 9788770668279

Caspar Wessel havde nok regnet med, at de nye tal og deres regneregler ville blive mødt med skepsis fra de professionelle matematikere. Specielt måtte det blive opfattet som noget næsten kættersk at uddrage kvadratroden af negative tal. I afhandlingens indledning lagde Caspar Wessel derfor stor vægt på at forklare, at udvidelsen af talbegrebet ikke ændrede de sædvanlige regneregler. Det nye var blot, at operationerne udstraktes til at omfatte flere tal end de reelle:

> *...jeg siger om man tager sig denne Frihed, og dog ei derved overtræder de sædvanlige Operationsregler, saa modsiger man jo ikke derfor den første Lære om Tallene; ...*

Afhandlingen burde have givet Caspar Wessel international berømmelse, men sådan gik det ikke. Ingen synes at have bemærket den. Abstraktionsniveauet var måske for højt for de hjemlige matematikere, og afhandlingen var skrevet på dansk, som var uforståeligt ude i Europa.

I en oversigt fra 1843 over artiklerne i Videnskabernes Selskabs Skrifter kan man om de matematiske afhandlinger, heriblandt Caspar Wessels, læse, at *de ereMonographier, hvis videnskabelige Betydning ikke er stor, ... de ere for specielle til videre at omtales*.

Mere tydeligt kan man vist ikke udtrykke manglende forståelse. Først omkring 100 år efter udgivelsen blev Caspar Wessels afhandling genopdaget, men da havde andre allerede fået æren for en logisk korrekt fremstilling af de komplekse tal. Man skulle helt frem til midten af 1800-tallet, før de komplekse tal blev almindeligt anerkendt i bredere kredse og accepteret som en gyldig del af matematikken.

Jørgen Ebert har desuden skrevet et undervisningsmateriale, som er en historisk og aksiomatisk introduktion til Caspar Wessels komplekse tal. Materialet findes på Jørgen Eberts hjemmeside, som kan tilgås **her.**