

## Projekt 4.6 Minamata-katastrofen. En modellering af ligevægt mellem lineær vækst og eksponentiel henfald

---

Der findes mange situationer, hvor en bestemt størrelse ændres som følge af vekselvirkninger med omgivelserne. I en af de simpleste modeller sker det ved at størrelsen dels vokser lineært, dels aftager eksponentielt. Fx vil mange stoffer optages lineært i kroppen gennem den daglige fødeindtagelse og indåndingen. Derimod vil de samme stoffer typisk udskilles eksponentielt fordi kroppens organer, som fx nyrer og lever er i stand til at fjerne en bestemt brøkdel af stoffet hver dag, når stoffet føres gennem de pågældende organer med blodstrømmen. Vi vil nu se på to sådanne situationer i større detalje:

### Eksempel 1: Radioaktivt kulstof

Den radioaktive kulstofisotop C-14 dannes i atmosfæren som følge af den kosmiske stråling, hvor neutroner rammer kvælstofkerner N-14 og omdanner dem til kulstofkerner C-14 og protoner. Det anslås af der årligt i gennemsnit dannes 7.5 kg radioaktivt kulstof 14-isotoper i atmosfæren. Mængden af radioaktivt kulstof 14 vokser derfor med 7.5 kg om året.

#### Øvelse 1

Hvis denne kerneprocess var den eneste årsag til ændringer i mængden af den radioaktive kulstof 14-isotop, hvilken vækstmodel vil da beskrive udviklingen af mængden som funktion af tiden. Fremstil såvel en tabel, som en graf og en ligning, der illustrerer denne vækstmodel.

Men netop fordi kulstof 14 er ustabil og henfalder ved radioaktive henfald aftager mængden også med en fast brøkdel hvert år svarende til en halveringstid på 5730 år.

#### Øvelse 2

Hvis disse henfald var den eneste ændring i mængden af den radioaktive kulstof 14-isotop, hvilken vækstmodel vil da beskrive udviklingen af mængden som funktion af tiden. Fremstil såvel en tabel, som en graf og en ligning, der illustrerer denne vækstmodel.

I praksis spiller de to processer sammen og det er denne kombination af en voksende lineær vækst og en aftagende eksponentiel proces vi vil undersøge i det følgende. Da halveringstiden på 5730 år er rimeligt stor i forhold til tidsenheden 1 år vil vi sætte tidsskridtet i modellen op til 50 år.

Projekter: Kapitel 4. Projekt 4.6 Minamata-katastrofen.  
En modellering af ligevægt mellem lineær vækst og eksponentiel henfald

### Øvelser 3

- Hvor meget radioaktivt kulstof 14 tilføres der i gennemsnit i løbet af 50 år, som følge af kerneprocesserne forårsaget af den kosmiske stråling?
- Hvor stor en brøkdel af det radioaktive kulstof 14 forsvinder i gennemsnit i løbet af 50 år som følge af radioaktive henfald?
- Opret nu et regneark med to søjler: En til at beskrive tiden som du udfylder med tallene 0, 50, 100, ..., 50000, dvs. vi følger processen gennem 50 000 år, og en til at beskrive ændringerne i mængden af radioaktivt kulstof 14 målt i kg. Vi antager først at der til tiden  $t = 0$  slet ikke er noget radioaktivt kulstof tilstede og ser så hvad der sker: I hver ny tidsperiode skal du nu dels lægge den mængde radioaktivt kulstof som du fandt i spørgsmål c til den forrige mængde fra cellen ovenover, dels skal du trække den *brøkdel* af den forrige mængde fra, som du fandt i spørgsmål d. Når du har gjort det kan du trække formelen ned gennem regnearket, så du får udregnet mængden af radioaktivt kulstof 14 i alle 1000 celler.
- Fremstil på basis af tabellen et diagram, der illustrerer hvordan mængden af radioaktivt kulstof ændres gennem 50000 år. Beskriv udviklingen: Hvad sker der fx de første 1000 år, hvad sker der de sidste 1000 år?
- Tilføj grafen for den lineære vækstmodel, der ville gælde, hvis kulstof 14 ikke henfaldt. Kommenter de to grafer.
- Opret en kopi af din tabel og gentag nu den samme undersøgelse, hvor du i stedet starter med et højt niveau, svarende til sådan ca. det dobbelte af slutniveauet for den første undersøgelse. Konklusion?

### Teori for den kombinerede vækstmodel:

Vi vil nu prøve om vi kan forstå lidt mere i detalje samspillet mellem den lineære og den eksponentielle vækstmodel: Vi tilføjer den samme mængde i hvert tidsrum, men vi udskiller en bestemt brøkdel af det niveau vi er nået op på!

### Øvelse 4

- Hvad sker der hvis udgangsniveauet er så lavt, at brøkdelen er mindre end den faste tilvækst per tidsenhed. Stiger niveauet eller falder det?
- Hvad sker der hvis udgangsniveauet er så højt, at brøkdelen er større end den faste tilvækst per tidsenhed. Stiger niveauet eller falder det?
- Hvor stort skal udgangsniveauet være for at brøkdelen netop er den samme den faste tilvækst per tidsenhed? Hvordan udvikler niveauet sig i dette tilfælde, når tiden går? Da der kun er tale om en gennemsnitlig fast tilvækst og en gennemsnitlig fast brøkdel, vil niveauet i praksis godt kunne svinge lidt: Hvad sker der hvis det vokser lidt? Aftager lidt?
- I det foregående skulle du gerne have fundet et karakteristisk niveau, *ligevægtsniveauet*, som mængden af radioaktivt kulstof nærmer sig. Opret nu en ekstra søjle i dit regneark, der udregner **afstanden** til ligevægtsniveauet. Fremstil nu grafen for afstanden som funktion af tiden. Hvilken sammenhæng er der tale om? Prøv nu om du kan finde ligningen for hvordan mængden af radioaktivt kulstof 14 udvikler sig med tiden.

*Bemærkning:* I detaljerede modeller for kulstofkredsløbet anslår man at der i atmosfæren i gennemsnit befinder sig ca. 1 ton radioaktivt kulstof 14. Hvordan passer det med den ovenstående model? Hvor befinder resten af det radioaktive kulstof sig?

## Eksempel 2: Minamata-katastrofen

I dette eksempel vil vi se nærmere på menneskers optagelse og udskillelse af giftstoffer – se også projekt 4.2: Kroppens forbrænding af alkohol, medicin og andre stoffer. For enkeltheds skyld vil vi koncentrere os om tungmetallet kviksølv. Problemet med kviksølvs giftighed har ikke altid været erkendt. Først i 1700 tallet advarede man fx mod at bruge det røde cinnober (HgS) til kindrødt og læbepomade:

*”De, som har været dumme nok til at bruge cinnober, får sædvanligvis mundkræft, rådnende tandkød, løsnede tænder, stinkende ånde og sure øjne”*

Men også i nyere tid har man sløset med omgangen af kviksølv og tilladt fx landbruget at bruge kviksølv til bejdsning af korn. Dette ændrede sig imidlertid efter den Japanske katastrofe i Minamata, der for alvor satte fokus på problemerne omkring ukontrolleret brug af kviksølv.

I begyndelsen af 50'erne blev den Japanske fiskerby Minamata ramt af en uhyggelig sygdom. Først opførte dyrene sig ejendommeligt: Katte hylede og løb sanseløse omkring, krager styrtede lodret ned fra himlen. derefter begyndte mennesker sig også at opføre sig underligt: de fik synsforstyrrelser, blev svimle og mistede til sidst forstanden. Du kan finde flere detaljer om katastrofen på internettet ved fx at søge på Minamata Disease.

Kviksølvforbindelser opdeles løst sagt i to hovedgrupper:

- *Uorganiske forbindelser* som kviksølvsaltene Cinnober (HgS), kviksølvoxid (HgO), kviksølvchlorid (HgCl<sub>2</sub>) og kviksølvsulfat (HgSO<sub>4</sub>)
- *Organiske forbindelse* som fx forbindelser mellem kviksølv og kulbrinter: methylkviksølvioner (CH<sub>3</sub>Hg<sup>+</sup>), dimethylkviksølv (CH<sub>3</sub>HgCH<sub>3</sub>) og penylkviksølvioner (C<sub>6</sub>H<sub>5</sub>Hg<sup>+</sup>)

De organiske kviksølvforbindelser er langt de farligste: De er fedtopløselige, ophobes nemt i kroppen, men er svære at nedbryde og også svære at udskille igen.

I Minamata udledte man store mængde uorganisk kviksølv direkte i havvandet, hvor de aflejres på havbunden. Men her omdannedes de af specielle bakterier til methylkviksølv, der igen påløses i havvandet. Det var denne organiske kviksølv, der blev optaget gennem gællerne i fiskene og derefter ophobet i fødekæden hos både dyr og mennesker på landjorden.

Tungmetaller optages gennem den mad, vi spiser, det vand vi drikker og den luft vi indånder. De er en uundgåelig del af vores omgivelser, og vi optager derfor en bestemt mængde hver dag, som afspejler koncentrationen i omgivelserne. Heldigvis er vores krop i stand til at udskille tungmetallerne igen. Udskillelsen sker fx gennem nyrerne og leveren, der fjerner en bestemt brøkdel fra det gennemstrømmende blod. Udskillelsen af tungmetaller er derfor også karakteriseret ved en vis biologisk halveringstid.

- For uorganiske kviksølvforbindelser er den biologiske halveringstid 6 dage.
- For organiske kviksølvforbindelser er den biologiske halveringstid 70 dage.

Hvis kropsbelastningen når op over 100 mg dukker der svære forgiftningssymptomer op. Det gælder derfor om at begrænse det daglige optag af kviksølv (gennem at nedsætte mængden af kviksølv i omgivelserne!)

**Øvelse 5**

- a) De anbefalede maksimumsværdier for optagelse af tungmetaller kaldes ADI-værdier (for acceptabelt dagligt indtag). Hvad er ADI-værdierne for uorganisk og organisk kviksølv?

Vi vil nu regne på et forurenede miljø, hvor man dagligt optager 2 mg uorganisk kviksølv.

- b) Hvis dette daglige optage var den eneste årsag til ændringer i mængden af kviksølv i kroppen, hvilken vækstmodel vil da beskrive udviklingen af mængden som funktion af tiden. Fremstil såvel en tabel, som en graf og en ligning, der illustrerer denne vækstmodel.

Men netop fordi kviksølv udskilles i fx nyrerne og leveren aftager mængden også med en fast brøkdelt hver dag svarende til en biologisk halveringstid på 6 dage.

- c) Hvis denne udskillelse var den eneste ændring i mængden af kviksølv i kroppen, hvilken vækstmodel vil da beskrive udviklingen af mængden som funktion af tiden. Fremstil såvel en tabel, som en graf og en ligning, der illustrerer denne vækstmodel.

I praksis spiller de to processer sammen og det er denne kombination af en voksende lineær vækst og en aftagende eksponentiel proces vi vil undersøge i det følgende.

- d) Hvor stor en brøkdelt af det uorganiske kviksølv forsvinder dagligt som følge af udskillelsen?
- e) Opret nu et regneark med to søjler: En til at beskrive tiden som du udfylder med tallene 0, 1, 2, ..., 730, dvs. vi følger processen gennem to år, og en til at beskrive ændringerne i mængden af uorganisk kviksølv målt i mg. Vi antager da, at der til tiden  $t = 0$  slet ikke er noget uorganisk kviksølv til stede i kroppen og ser så hvad der sker: For hver dag, der går, skal du nu dels lægge en fast mængde uorganisk kviksølv svarende til 2 mg til den forrige mængde fra cellen ovenover, dels skal du trække den *brøkdelt* af den forrige mængde fra, som du fandt i spørgsmål o. Når du har gjort det, kan du trække formlen ned gennem regnearket, så du får udregnet mængden af uorganisk kviksølv i alle 730 celler.
- f) Fremstil på basis af tabellen et diagram, der illustrerer hvordan mængden af uorganisk kviksølv ændres gennem to år. Beskriv udviklingen: Hvad sker der fx den første måned, hvad sker der den sidste måned?
- g) Tilføj grafen for den lineære vækstmodel, der ville gælde, hvis det uorganiske kviksølv ikke blev udskilt. Kommenter de to grafer.
- h) Opret en kopi af din tabel og gentag nu den samme undersøgelse, hvor du i stedet undersøger, hvad der sker, hvis du hver dag optager 2 mg organisk kviksølv med en biologisk halveringstid på 70 dage. Konklusion?

Projekter: Kapitel 4. Projekt 4.6 Minamata-katastrofen.  
En modellering af ligevægt mellem lineær vækst og eksponentiel henfald

### Teori for den kombinerede vækstmodel

Vi vil nu prøve om vi kan forstå lidt mere i detalje samspillet mellem den lineære og den eksponentielle vækstmodel: Vi tilføjer den samme mængde i hvert tidsrum, men vi udskiller en bestemt brøkdel af det niveau vi er nået op på!

- Hvad sker der hvis udgangsniveauet er så lavt, at brøkdelen er mindre end den faste tilvækst per tidsenhed. Stiger niveauet eller falder det?
- Hvad sker der hvis udgangsniveauet er så højt, at brøkdelen er større end den faste tilvækst per tidsenhed. Stiger niveauet eller falder det?
- Hvor stort skal udgangsniveauet være for at brøkdelen netop er den samme den faste tilvækst per tidsenhed? Hvordan udvikler niveauet sig i dette tilfælde, når tiden går? Da der kun er tale om en gennemsnitlig fast tilvækst og en gennemsnitlig fast brøkdel, vil niveauet i praksis godt kunne svinge lidt: Hvad sker der hvis det vokser lidt? Aftager lidt?
- I det foregående skulle du gerne have fundet et karakteristisk niveau, *ligevægtsniveauet*, som mængden af kviksølv nærmer sig i de to tilfælde. Opret nu en ekstra søjle i dit regneark, der udregner **afstanden** til ligevægtsniveauet. Fremstil nu grafen for afstanden som funktion af tiden. Hvilken sammenhæng er der tale om? Prøv nu om du kan finde ligningen for hvordan mængden af kviksølv i kroppen udvikler sig med tiden.