ISBN 978 87 7066 827 9

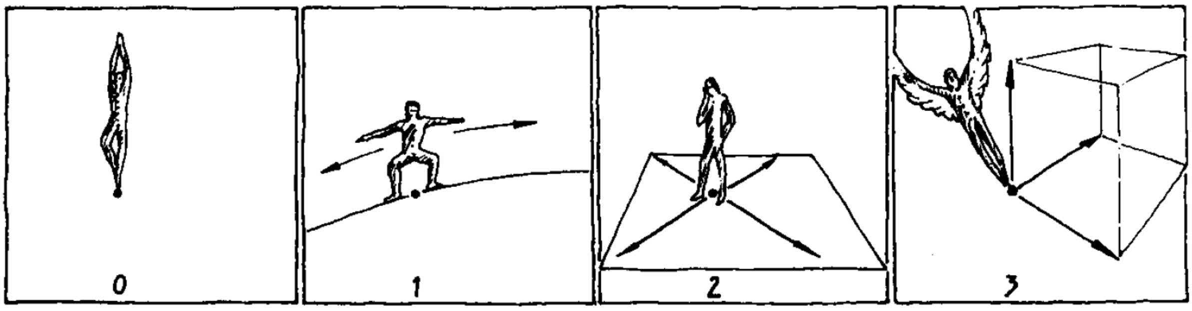
Projekt 3.5 Geometriske fraktaler – Kochs snefnug

1. Fraktaler og vækstmodeller

Geometriske figurer med uendelig små mikrostrukturer kaldes for *fraktaler.* Det var den fransk-amerikanske matematiker Benoit Mandelbrot, der i 1975 indførte denne betegnelse efter det latinske ord for "brud" for at minde om de uregelmæssige brudflader, der ofte opstår, hvis man knækker en gren eller flækker en sten, jf. fraktur = benbrud. Fraktaler er derfor velegnede, når man skal lave modeller af naturens former og ønsker at fremhæve deres uregelmæssige struktur. Fx er kystlinjer fulde af bugter og sving af alle mulige størrelser. Ligegyldigt hvor tæt man kommer på en kyst, vil der dukke stadig mindre bugter og sving op, indtil vi kommer så tæt på, at mikrostrukturen drukner i havet, der skyller frem og tilbage i vandkanten.

2 Dimensionsbegrebet

Det kan synes mærkeligt at tale om en dimension på fx halvanden. I daglig tale er vi vant til at betragte *dimension* som et af de hele tal 0, 1, 2 eller 3. Et punkt har dimensionen 0, en linje dimensionen 1, en plan figur som fx et kvadrat har dimensionen 2, og endelig har en rumlig figur som fx en kasse dimensionen 3:



Der er flere måder at begrunde dette intuitive dimensionsbegreb på. Én af dem er følgende:

a) Hvis man står i et punkt, kan man slet ikke flytte sig uden at forlade punktet. Et punkt har dimension nul.

b) Hvis man står på en linje, kan man bevæge sig i præcis en "retning" (idet vi ikke skelner mellem frem og tilbage), hvis man ikke må forlade linjen. En linje har dimension 1. Det samme gælder fx for en cirkelbue. Hvis man forstørrer buen omkring et punkt på cirkelbuen, kan man til sidst ikke skelne den fra en ret linje. Hvis man befinder sig på en cirkelbue, har man derfor også netop en retning (frem og tilbage i tangentens retning), hvor man kan bevæge sig uden at forlade cirkelbuen.

c) Hvis man står inde i et kvadrat, har man altid to på hinanden vinkelrette retninger til rådighed, når man vil bevæge sig rundt i kvadratet.

d) En plan figur har dimension 2. I rummet har man tre på hinanden vinkelrette retninger til rådighed. Rummets dimension er derfor 3.

Men hvad med denne kystlinje? Den er meget krøllet, og hvis man bevæger sig selv et nok så lille stykke langs den, kan man ligeså vel risikere at være gået i lodret retning som i vandret retning. Den er derfor indrettet som en mellemting mellem en sædvanlig glat kurve og en plan figur. Det er derfor, man kan finde på at tilskrive den en dimension mellem 1 og 2.
Vi vil i projekter i bind 2 og 3 vende tilbage til at undersøge fraktale dimension.

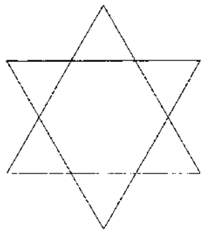
ISBN 978 87 7066 827 9

3. Koch's fraktale figurer

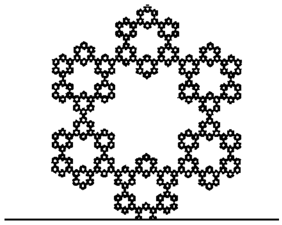
Hvis man tegner en ligesidet trekant og lægger en anden ligesidet trekant omvendt over den første, får man konstrueret en sekstakket stjerne: *davidsstjernen.* Takkerne består af seks nye ligesidede trekanter. Oven på disse lægger vi nu seks andre ligesidede trekanter omvendt på. Man får herved konstrueret seks nye davidsstjerner. De nye takker danner 36 endnu mindre ligesidede trekanter osv. osv. Fortsætter vi på denne måde *i det uendelige,* får vi frembragt en *fraktal figur, den triadiske kurve,* der blev opdaget og undersøgt af den svenske matematiker Koch i 1904.

Kvinde med mandolin (Picasso 1911)

Kubismen er et eksempel på en kunstretning, der fortrinsvis udtrykker sig ved hjælp af klassiske geometriske figurer som rette linjer, trekanter og cirkler i overensstemmelse med Cezannes manifest: "Alle former i naturen kan føres tilbage til kuglen, keglen og cylinderen" (ca. 1900).



Davidsstjernen: Den klassiske geometris forløber for den triadiske kurve



Den triadiske kurve (Koch, 1904).

Cesaro: "Denne uendelige indlejring af dens form i sig selv giver os en fornemmelse for det, som Tennyson et sted har kaldt den *indre uendelighed,* der jo til syvende og sidst er den eneste slags uendelighed, vi kan opleve i naturen. En sådan lighed mellem helheden og dens dele, selv i de uendelig små dele, får den triadiske Koch kurve til at fremstå som noget enestående. Kunne den vækkes til live, ville vi kun kunne slippe af med den igen ved at ødelægge den fuldstændigt, for den ville kunne opstå igen og igen fra dens mindste dele, på samme måde som livet selv gør det i Universet" (1905).

ISBN 978 87 7066 827 9

3.1 Kochs snefnug: omkreds, areal og dimension

Kochs snefnug konstrueres som alle fraktale figurer i en såkaldt *iterationsproces*, hvor iteration betyder gentagelse. Den proces, der gentages er følgende:

Udgangspunktet er en ligesidet trekant med sidelængde 1.

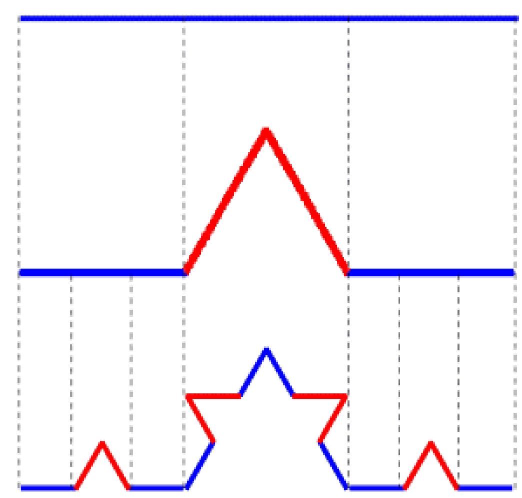
Ethvert linjestykke tredeles

På det linjestykke der udgør den midterste tredjedel konstrueres en ligesidet trekant.

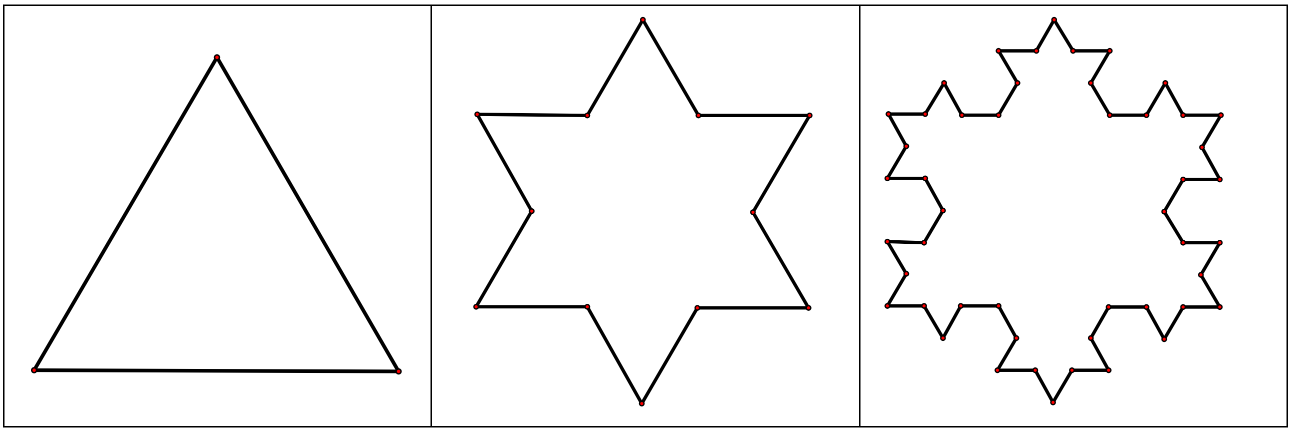
Linjestykket der udgør den midterste tredjedel fjernes og erstattes således af de to resterende sider i den ligesidede trekant (de røde sider på tegningen).

Hvert af de oprindelige linjestykker er nu erstattet af en brudt linje bestående af 4 linjestykker, der hver har en længde på $\frac{1}{3}$ af det oprindelige. Dvs den nye brudte linje har en længde på $\frac{4}{3}$ af den oprindelige linje

Denne proces gentages på hvert af de nye linjestykker.



Vi starter altså med en ligesidet trekant, og de første to iterationer ser således ud:



Processen fortsættes i det uendelige. Du kan [her] hente en lille film, der viser en simulering af den uendelige proces.

Det er klart – fx ud fra animationen – at man ikke kan tegne den endelige udgave af Kochs Snefnug. Men ran kan vise, at det faktisk er en sammenhængende figur som grænse for alle disse tredelinger osv.

Lad os forsøge at beregne areal og omkreds af denne "grænse-figur".

På hvert trin har alle linjestykker samme længde. Vi ønsker at finde længden af et sådant linjestykke som funktion af antallet af trin.

ISBN 978 87 7066 827 9

L&R Uddannelse
EGMONT

a) Betragt figuren øverst på siden og lad os sige længden af den blå linje er 1, så de enkelte stykker har længde $\frac{1}{3}$. Så er længden af den knækkede linje med en rød trekant lig med $\frac{4}{3}$. Hvis længden havde været *a* i stedet for 1, hvad var så længden af den knækkede linje?

b) Hvis længden af den knækkede linje er *b*, hvad bliver så længden af den tredje linje med de mange knæk?

c) Hvis den blå liinje har længde 1, hvad er så formlen for længden af linjen i 2. trin med de mange knæk? Hvad er formlen for længden af den næste knækkede linje?

b) Hvad er længden af linjen blevet til efter at vi har gentaget denne proces 10 gange? n gange?

c) Hvor lang er den samlede omkreds efter 10 gange? Efter n gange?

d) Hvor lang er omkredsen af den endelige grænsefigur af Kochs snefnug?

e) Hvor stor er arealet af den ligesidede trekant med sidelængde 1?
(*hint:* Bestem først højden i den røde trekant ved at opdele trekanten og anvend Pythagoras sætning)

f) Når sidelængden i de ligesidede trekanter i første trin af iterationerne er på $\frac{1}{3}$, hvor stor er arealet da af en af disse trekanter?

f) Hvor mange nye små trekanter er figuren øget med? Hvad er det samlede areal af figuren i 1. trin?

g) Sidelængderne i et givet trin er på $\frac{1}{3}$ af sidelængderne i det foregående trin. Hvor stor en brøkdel udgør arealet af en trekant i forhold til arealet af trekanterne i det foregående trin?

h) Hvor mange nye små trekanter er figuren øget med i trin nr n? Hvad er det samlede areal af figuren i trin nr n?

i) Hvor stort er arealet af den endelige grænsefigur af Kochs snefnug?

Ovenstående udregninger viser blot en enkelt af de mange overraskende fænomener i fraktalernes verden: En figur med et meget begrænset areal kan godt have en omkreds bestående af en sammenhængende kurve, der er uendelig lang.

Det viser sig i øvrigt, at kurven, der udgør omkredsen, har en fraktal dimension på $\frac{\ln(4)}{\ln(3)} = 1.26186$.