ISBN 978 87 7066 827 9

L&R Uddannelse
EGMONT

Projekt 10.5 Achilleus og skildpadden – en fortælling om uendelighed

Uendelighed har ikke blot voldt store problemer som et tal, men også som et begreb i sig selv. Vi har tidligere, fx i kapitel 0, set på uendelige processer, der altid har fascineret matematikere og filosoffer. I antikken udnyttede filosoffen Zenon således de paradoksale forhold omkring de uendelige processer til at så tvivl om, hvorvidt vores oplevelse af verden nu rent faktisk også afspejler verden, som den er. Et af hans mest berømte paradokser er paradokset om Achilleus og skildpadden. I en nylig Japansk film med samme titel starter filmen netop med en smuk sekvens, hvor paradokset forklares:

Du kan se starten på filmen med engelske undertitler på Youtube her.
http://www.youtube.com/watch?v=VI6UdOUg0kg&feature=youtu.be
Dette berømte paradoks vi nu vil forsøge at kaste lys over ved at kigge nærmere på en uendelig proces:

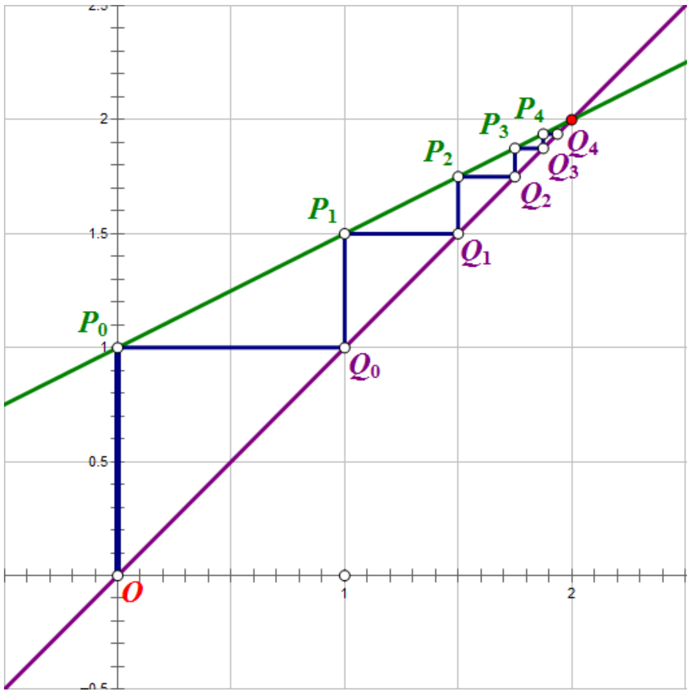
Øvelse 5.1

a) Åbn dit dynamiske geometriprogram og vælg om nødvendigt koordinatvisning. Indfør to skydere for parametrene a (der løber mellem 0 og 1) og b (der løber mellem 0 og 2). Sæt startværdien for a til ½ og startværdien for b til 1. Tegn linjerne $y = a \cdot x + b$ og $y = x$.

b) Vi konstruerer nu en serie af trappetrin på følgende måde
Konstruer først skæringspunktet P_0 mellem linjen $y = a \cdot x + b$ og y-aksen.
Konstruer en linje gennem skæringspunktet P_0 parallel med x-aksen. Den skærer linjen $y = x$ i punktet Q_0.
Konstruer en linje gennem skæringspunktet Q_0 parallel med y-aksen. Den skærer linjen $y = a \cdot x + b$ i punktet P_1.
Således fortsættes til du ikke længere kan skelne trappetrinene!
Udmål nu længderne af såvel de lodrette som de vandrette trappetrin: Hvilken sammenhæng er der mellem de vandrette og de lodrette trappetrin? Hvad bliver summen af alle de lodrette trappetrin?

c) Udskift nu værdien af a med 1/3. Hvilken sammenhæng bliver der så mellem de vandrette og lodrette trappetrin? Hvad bliver nu summen af de lodrette trappetrin?

ISBN 978 87 7066 827 9



I den ovenstående øvelse har vi set at summen af de uendeligt mange trappetrin er givet ved formlen

$$b + b \cdot a + b \cdot a^2 + b \cdot a^3 + \ldots$$

Men vi har også set at denne uendelige sum kan findes som højden af skæringspunktet mellem de to linjer:
Vi finder først x

$a \cdot x + b = x$

$b = x - a \cdot x$ Vi trækker $a \cdot x$ fra på begge sider

$b = x \cdot (1-a)$ Vi sætter x uden for en parentes

$\frac{b}{1-a} = x$ Vi dividerer med $(1-a)$ på begge sider

Men da y = x i skæringspunktet får y den samme værdi. Vi har altså vist den følgende formel for en uendelig sum

$$b + b \cdot a + b \cdot a^2 + b \cdot a^3 + \ldots = \frac{b}{1-a}$$

Dette er den første formel for en uendelig sum. Mange skulle følge efter – det fortæller vi mere om på B- og A-niveau.

ISBN 978 87 7066 827 9

L&R Uddannelse EGMONT

Øvelse 5.2

a) Hvad har det nu at gøre med Achilleus og Skildpadden? Jo, de to grafer kan tolkes som bevægelsesgraferne for Achilleus og Skildpadden: Vi afsætter tiden ud af *x*-aksen. Til tiden $t = 0$ starter Achilleus i $x = 0$, og lader vi Achilleus løbe med hastigheden 1 vil bevægelsesgrafen for Achilleus netop være $y = x$. Skildpadden løber langsommere men til gengæld får den et forspring:
Bevægelsesgrafen for skildpadden er da netop $y = a \cdot x + b$.
Hvis fx a = ½ så løber skildpadden altså halvt så hurtigt som Achilleus.
Hvad betyder værdien for *b*?

b) Hvad sker der, hvis du lader skyderen for *a* passere 1? Hvor skærer de to grafer så hinanden? Hvilken fortolkning kan man nu give problemet med Achilleus og skildpadden? Hvordan ville det se ud, hvis man fulgte skæringspunktet på en talcirkel? Da både *b* og *a* er positive burde venstresiden kun kunne give positive tal: Men for *a* større end 1 giver den åbenbart et negativt tal! Hvordan har du det med det?

Selv om en matematiker måske ikke har problemer med at summere over uendelig mange tal og heller ikke med at resultatet måske bliver et lille tal som 2, så løser det i virkeligheden ikke Zenons paradokser. For matematikeren løser problemet i sin egen matematiske verden, hvor man har indført, at man godt kan operere med uendeligt mange tal på en gang.

I den virkelige verden findes ikke uendeligt mange af nogen ting. Det er en abstraktion. *Derfor er den matematiske løsning ikke en løsning af paradokset, men en oversættelse af det til det helt fundamentale problem om forholdet mellem matematik og virkelighed*. Man kan illustrere dette med følgende to paradokser:

- Hvis vi kan forestille os, at vi håndterer uendeligt mange tal på én gang, så kan vi også forestille os, at for hvert tal vi møder – for hver lille distance Achilleus løber – så råbes et tal op, nemlig nummeret på hvor langt vi er kommet frem i rækken af de uendeligt mange tal. Hvis Achilleus indhenter skildpadden er alle tal blevet råbt op! Det forekommer absurd. Hvis det hele var optaget på film, og vi spillede filmen baglæns, hvad var så det tal, der blev råbt op?
- Hvis vi kan forestille os, at vi håndterer uendeligt mange tal på én gang, så kan vi også forestille os, at for hvert tal vi møder – for hver lille distance Achilleus løber – så tændes eller slukkes en lampe. Efter halvdelen er gennemløbetændes lampen, efter yderligere en fjerdedel, så slukkes lampen, efter endnu en ottendedel så tændes lampen… Den som mener, Achilleus overhaler skildpadden bedes så svare på: Er lampen tændt eller slukket når han passerer?