ISBN 978 87 7066 827 9

Projekt 10.4 Hvordan udvikler matematik sig – Lakatos og Eulers polyedersætning

Den ungarske matematiker og videnskabsteoretiker Imre Lakatos udformede sin teori om, hvad der er god videnskab, som en videreudvikling af Karl Poppers og Thomas Kuhns teorier. Disse er kort beskrevet i 2.3 i kapitel 10. Ifølge Lakatos er målestokken på, om noget kan kaldes en *god videnskabelig teori* er, om *den er produktiv*. Det er ikke nok, at den kan beskrive og systematisere kendte fænomener, den skal kunne forudsige noget om hidtil ukendte fænomener, som vi så bagefter kan gå ud og undersøge – og evt. falsificere.

Imre Lakatos (1922-1974)

Et eksempel på en teori, der ifølge Lakatos ikke lever op til dette, er Oldtidens (Ptolemaios og Aristoteles) geocentriske verdensbillede med de mange epicykel-bevægelser - modellen beskriver vore observationer, men kan ikke forudsige noget om nye fænomener, fx nye planeter. Opstår nyt så redder man situationen ved en ny omgang beskrivelse med nye epicykler. Det er altså slet ikke en videnskabelig teori.

Lakatos er også kritisk overfor den *formalistiske* tilgang til matematik, hvor matematik reduceres til, at vi først formulerer aksiomer og definitioner, og dernæst anvender formelle logiske regler til at udlede matematiske sætninger ud fra dette. I et sådant system er alt i virkeligheden til stede "i kim" i de oprindelige aksiomer og definitioner, for de vokser fuldstændig logisk ud af dem – ligesom planten er til stede i det frø der plantes.

Lakatos forkaster ikke, at vi i matematik formulerer definitioner og aksiomer, eller at vi anvender logiske slutningsregler, men han anskuer det anderledes dynamisk. Vi starter ikke med aksiomer, men med et problem, en sag vi vil undersøge, en hypotese, som vi vil prøve at bevise. *Definitioner og aksiomer sætter dernæst rammen* om det arbejde, vi går i gang med, men når vi kører fast, så kan nye aksiomer eller nye definitioner komme på tale, som så vil føre et nyt sted hen. Hvad vil det sige, at *vi kører fast*? For Lakatos betyder det ofte, at der kommer modeksempler på banen: Vi prøver at *bevise* noget (*proof*) – og så kommer der et *modeksempel* (*refutation*). Hvis teorien er produktiv, så sættes nu en ny scene.

I matematik er det derfor ifølge Lakatos *beviserne*, der er motoren i udviklingen, det produktive element.

ISBN 978 87 7066 827 9

Han gav et stort gennemarbejdet eksempel på sin teori i bogen. Eksemplet handler om en meget berømt sætning i matematikkens historie, *Eulers Polyedersætning*, der siger, at for alle polyedre gælder:

$$V - E + F = 2\,,$$

hvor V er antallet af hjørner, E antallet af kanter og F antallet af sider. Samtidig med gennemgangen gennemføres en diskussion af, om beviset holder.

På engelsk kaldes denne sætning ofte for *Eulers formula*. Men man skal passe på ved søgning på nettet, for dette navn er også knyttet til en helt anden formel der handler om de såkaldte komplekse tal.

Øvelse 1
Hvad siger sætningen om sammenhængen mellem antal hjørner, antal kanter og antal flader for et polyeder. Find ud af det ved at besøge en hjemmeside som *denne*
Kontroller formlen med en pyramide og en terning

Vi vil nu sætte os ind i hvordan Imre Lakatos argumenterer, ved at følge hans bevis for Eulers polyedersætning fra *Proofs and Refutations*, og hans diskussion af om beviset holder. Et stort uddrag af bogen er oversat til dansk af videnskabshistorikerne Henrik Kragh Søerensen og Kurt Ramskov, og kan findes **her.**

Øvelse 2
Læs det følgende uddrag, hvor beviset gennemgås, og hvor der gennemføres en første diskussion af beviset. Noter de vigtigste skridt i beviset og præsenter beviset for hinanden.

Kapitel 1. Et problem og en formodning
Man skal forestille sig, at samtalen finder sted i et klasseværelse. Klassen bliver interesseret i et PROBLEM:

> *Er der en relation mellem antallet af hjørner V, antallet af kanter E og antallet af sider F i et polyeder — specielt i regulære polyedre — analog til den trivielle relation mellem antallet af hjørner og kanter i polygoner, nemlig at der er lige så mange kanter som hjørner: V = E?*

Denne sidstnævnte relation tillader os at klassificere polygoner efter antallet af kanter (eller hjørner): trekanter, firkanter, femkanter osv. En analog relation vil hjælpe os til at klassificere polyedre.

Efter mange forslag og forsøg finder klassen ud af, at for alle regulære polyedre gælder:

$$V - E + F = 2$$

Nogle gætter på, at dette gælder for ethvert polyeder. Andre prøver at falsificere formodningen og forsøger at afprøve den på mange forskellige måder. Den holder godt. Resultatet underbygger formodningen og giver en forventning om, at den kan bevises. Det er på dette tidspunkt efter formuleringen af problemet og formodningen, at vi kommer ind i klasseværelset.† Lærere skal til at give et bevis.

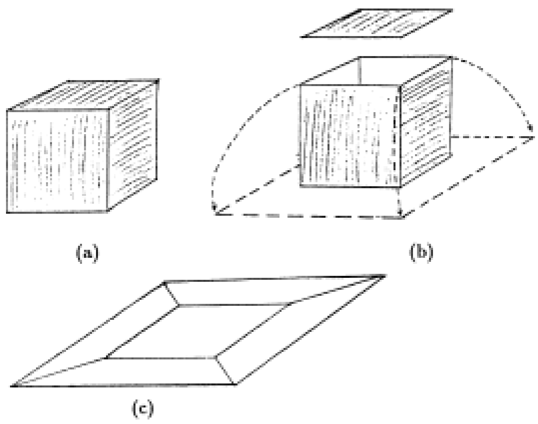
ISBN 978 87 7066 827 9

Kapitel 2. Et bevis

LÆREREN: I sidste time endte vi med en formodning om, at for alle polyedre gælder $V-E+F=2$, hvor V er antallet af hjørner, E antallet af kanter og F antallet af sider. Vi fik afprøvet den medforskellige metoder, men vi har endnu ikke bevist den. Har nogen fundet et bevis?

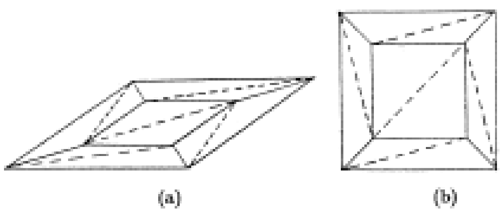
SIGMA: "Jeg må indrømme, at jeg endnu ikke har været i stand til at give et stringent bevis forsætningen . . . . Men eftersom sandheden af den er blevet kontrolleret i så mange tilfælde, kan der ikke være nogen tvivl om, at sætningen gælder for alle polyedre. Så sætningen ser ud til at være tilfredsstillende bevist." Har du imidlertid et bevis, så lad os bare se det.

LÆREREN: Jeg har et. Det består af det følgende tankeeksperiment.
1. Lad os forestille os, at polyederet er hult med en overflade af tynd gummi. Hvis vi skærer en side ud, kan vi flade den tilbageværende overflade ud på en tavle uden at ødelægge den. Siderne og kanterne vil blive deformerede, kanterne kan blive krumme, men V og E vil ikke blive ændret, så hvis $V-E+F=2$ for det oprindelige polyeder, så vil $V-E+F=1$ for det flade netværk.
Husk, at vi har fjernet en side. (figur 1 viser det flade netværk i det tilfælde, hvor polyederet er en terning).



1. Bevisets første skridt udført på en terning

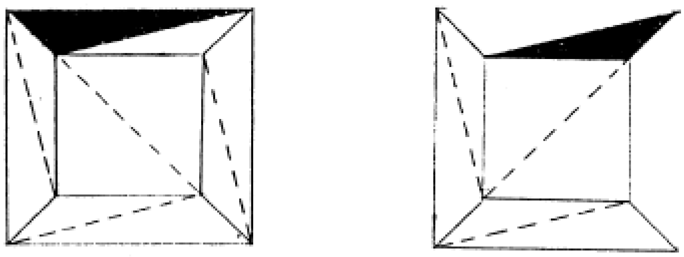
2. Nu triangulerer vi vort kort; det ligner jo faktisk et geografisk kort (se figur 2). Vi tegner (muligvis krum-me)diagonaler i de (muligvis krumsidede) polygoner, som ikke allerede er (muligvis krumsidede)trekanter. Hver gang vi tegner en diagonal forøges både E og F med 1, så værdien af $V-E+F$ er uændret.



2. Trianguleringen af netværket fra terningen

3. Fra netværket af trekanter fjerner vi nu trekanterne en ad gangen. Når vi fjerner en trekant, fjerner vi enten én kant, hvorved en side og en kant forsvinder (se figur 3(a)), eller vi fjerner to kanter og ét hjørne, hvorved en side, to kanter og et hjørne forsvinder (se figur 3(b)). Så hvis $V-E+F=1$ før trekanten bliver fjernet, så har det også denne værdi efter trekanten er fjernet. Til slut har vi én enkelt trekant. For den gælder $V-E+F=1$ klart. Dermed har vi bevist vores formodning.

ISBN 978 87 7066 827 9



(a) (b)

3. De to måder, hvorpå man kan fjerne trekanter fra netværket

DELTA: Du burde nu kalde det en sætning. Det er ikke længere noget vi formoder.

ALFA: Det ved jeg nu ikke rigtigt. Jeg kan godt se, at dette eksperiment kan udføres på en terning eller et tetraeder, men hvorfra kan jeg vide, at det kan udføres på ethvert polyeder? Er du f.eks. sikker på, hr. lærer, at ethvert polyeder, efter en side er fjernet, kan flades ud på en tavle? Jeg har min tvivl om dette første skridt.

BETA: Er du sikker på, at når kortet trianguleres så vil man altid få en ny side for hver ny kant? Jeg har min tvivl om dit andet skridt.

GAMMA: Er du sikker på, at der kun er to alternativer: at der enten forsvinder en kant eller der forsvinder to kanter og et hjørne, når man fjerner trekanterne en efter en? Er du helt sikker på, at processen altid sluttermed én enkelt trekant? Jeg har min tvivl om dit tredje skridt.

LÆREREN: Selvfølgelig er jeg ikke sikker.

ALFA: Men så er vi værre stillet end før! I stedet for en formodning har vi nu mindst tre! Og det kalder du et "bevis"!

LÆREREN: Jeg indrømmer, at den traditionelle betegnelse "bevis" for dette tankeeksperiment måske kan betragtes som en smule misvisende. Jeg mener ikke med "bevis", at det sikrer sandheden af formodningen.

DELTA: Hvad gør det så? Hvad mener du et matematisk bevis beviser?

LÆREREN: Det er et skarpsindigt spørgsmål, som vi skal prøve at besvare senere. Indtil da foreslår jeg, at vi beholder den traditionelle tekniske betegnelse "bevis" for et tankeeksperiment — eller "kvasieksperiment" — som opløser den oprindelige formodning i delformodninger eller lemmaer, og derved indlejrer det i et muligvis fjernt område af viden. Vort "bevis" har for eksempel anbragt den oprindelige formodning, om krystaller eller faste legemer om I vil, i teorien om gummiflader. DESCARTES og EULER, som fremsatte den oprindelige formodning, drømte ikke en gang om dette.

ISBN 978 87 7066 827 9

Øvelse 3. Modeksemplers betydning

Læs nu den videre diskussion af beviset, kapitel 3, s 13-16. Noter de steder, hvor du ikke forstå argumenterne.

a) Hvad betyder *modeksempler*? Hvilken rolle spiller de i matematik.
b) Hvilken rolle spiller modeksempler i naturvidenskabelige fag? Hvad kunne den umiddelbare reaktion være på et forsøgsresultat, der strider mod en bestemt fysisk eller kemisk lovmæssighed være?
c) I forsøget på at opstille en model for verdensrummet, hvor himmellegemerne bevægede sig harmonisk i cirkler, blev de græske og alle senere astronomer konfronteret med observationer af, at planeter som Mars tilsyneladende bevægede sig baglæns af og til. Hvordan reagerede datidens astronomer på dette modeksempel?

Optagelse af Mars bevægelse set fra Jorden.
Optagelsen er foretaget over flere måneder fra et planetarium.

Øvelse 4. Definitioners betydning.

Læs den videre diskussion af beviset, kapitel 4, s 17-20. Noter de steder, hvor du ikke forstå argumenterne
Hvorfor begynder de at diskutere *definitioner*?

Øvelse 5. Andre beviser for Eulers polyedersætning

Der findes et væld af forskellige beviser for Eulers polyedersætning.

a) Den danske matematiker Hjelmslev menes at være ophavsmand til et af de mere visuelle beviser, som også er forholdsvis let at forstå – det såkaldte *vandstandsbevis*. Søg på nettet efter hvad dette går ud på. Eller læs beviset i Vagn Lundsgård Hansen, *Den geometriske dimension.*
b) I en anden af de berømte matematikbøger fra det 20. århundrede, G. Polya, *Mathematics and plausible reasoning*, gives i bind 1, kapitel III (*Induction in Solid Geometry*) et såkaldt induktionsbevis for Eulers polyedersætning. Induktionsbeviser er omtalt i kapitel 4.
c) På hjemmesiden **her** er samlet 19 forskellige beviser. De fleste ligger uden for gymnasiets faglige områder.

Øvelse 6. Gælder Eulers polyedersætning for alle polyedre?

1) Tegn en terning med et firkantet hul igennem. Tæl antal hjørner, kanter og flader. Gælder Eulers formel stadig?
2) Gå ind på siden **her**. Hvad er *Euler karakteristikken* for en størrelse?
3) Der ligger et **projekt** på hjemmesiden, hvor vi dels udvider Euklids begreb om regulære polyedre til de såkaldte stjernepolyedre, og dels undersøger polyedersætningens gyldighed. Stjernepolyedre optog også Kepler og et af disse prydede forsiden af Lakatos originale bog.