Hvad er matematik? 1
ISBN 978 87 7066 827 9

Projekt 10.12: Euklids algoritme og inkommensurabilitet

1.1 Introduktion:

Euklids algoritme er berømt af mange årsager: Det er en af de første effektive algoritmer man kender i matematikhistorien og den er uløseligt forbundet med problemerne omkring de inkommensurable størrelser. Vi vil i første omgang præsentere den i forbindelse med de naturlige tal, hvor den ikke giver anledning til problemer!

a) Tænk på to meget store naturlige tal x_1 og x_2. Hvordan vil du finde det største fælles mål, dvs. det største naturlige tal, der går op i dem begge. Det vil fx være nyttigt at kende dette tal, hvis vi ønsker at forkorte en brøk, hvor de to tal du tænker på er tæller og nævner i brøken.

Lad os nu se på et fiktivt eksempel, hvor arbejder i et regneark og lader regnearket frembringe de to meget store tal mellem 1 og en milliard ved hjælp af en passende tilfældighedsrutine:

	A
◆	
1	370913028
2	117576372

Regnearket foreslår altså 370 millioner 913 tusinde og 028 som det første tal og 117 millioner 576 tusinde og 372 som det andet tal. Vi kunne nu sagtens få regnearket til at beregne det største fælles mål, men i stedet vil vi anvende Euklids algoritme, der siger at du skal trække det mindste tal fra det største og det skal du fortsætte med!

> **Euklids algoritme**: Givet et par bestående af to tilfældige sammenlignelige størrelser. Træk den mindste størrelse fra den største størrelse. Se bort fra den største og begynd forfra med det nye par.

Vi skal altså lave det givne par om til et nyt par bestående af dels det mindste element dels forskellen på det største og det mindste element. Men det kan vi jo klare med nogle cellekommandoer:

b) I cellen a3 skriver du = min(a1:a2) (dvs. udregn det mindste af tallene i cellerne a1 og a2)
I cellen a4 skriver du =max(a1:a2)-min(a1:a2) (dvs. udregn forskellen mellem det største og det mindste af tallene i cellerne a1 og a2.)
Svært nu cellerne a3:a4 så du hele det nye par markeret. Derefter trækker du parret nedad fx til celle 200. Det afgørende er blot at du standser ved et lige nummer, så du får hele det sidste par med.

Hvordan ser det ud i dit regneark.

ISBN 978 87 7066 827 9

I mit regneark fandt jeg fx

87	24
88	60
89	24
90	36
91	24
92	12
93	12
94	12
95	12
96	0
97	0
98	12
99	0
100	12
101	0
102	12
103	0
104	12
105	0
106	12

Til sidst giver det mindste tal i algoritmen 0 og derefter gentager den bare sig selv. I dette tilfælde frembringer algoritmen altså parret {0,12}. Det viser sig da at 12 netop er det største fælles mål. Det kan vi sikre os er rigtigt ved at faktorisere de to tal:

	A	B
◆		
1	**370913028**	2^2*3*857*36067
2	**117576372**	2^2*3*193*50767
3	117576372	
B1	=factor(*a1*)	

Vi ser da at begge tallene har faktorerne $2^2 \cdot 3$ fælles og ikke andre! Men $2^2 \cdot 3 = 12$ og derfor er 12 det største fælles mål.

Det er ikke sikkert, du er lige så heldig. Det er faktisk svært at finde to tilfældige store tal, som har et fælles mål større end 1!

ISBN 978 87 7066 827 9

Hvis du trækker faktoriseringen ned i regnearket kan du se noget andet interessant:

	A	B
◆		
1	**370913028**	2^2*3*857*36067
2	**117576372**	2^2*3*193*50767
3	117576372	2^2*3*193*50767
4	253336656	2^4*3*5277847
5	117576372	2^2*3*193*50767
6	135760284	2^2*3^2*11*31*11059
7	117576372	2^2*3*193*50767
8	18183912	2^3*3*19*39877
9	18183912	2^3*3*19*39877
10	99392460	2^2*3*5*1656541
11	18183912	2^3*3*19*39877
12	81208548	2^2*3^3*283*2657
13	18183912	2^3*3*19*39877
14	63024636	2^2*3*233*22541
15	18183912	2^3*3*19*39877
16	44840724	2^2*3*1319*2833
17	18183912	2^3*3*19*39877
18	26656812	2^2*3^2*7*13*79*103
19	18183912	2^3*3*19*39877
20	8472900	2^2*3*5^2*61*463

Alle parrene har 12 som det største fælles mål! Sommetider kan der godt være flere faktorer 2 eller faktorer 3 for det ene tal i parret, men selve parret har hele tiden netop 12 som det største fælles mål. Det ser altså ud som om det største fælles mål nedarves via algoritmen fra par til par! Det er en nøgleegenskab ved Euklids algoritme!

Hvordan kan vi forstå denne nøgleegenskab?

c) Antag at du har givet to tal a og b og at du ved at et tredje tal c går op i dem begge, dvs. c er et fælles mål. Antag fx at c går 17 gange op i a og 12 gange op i b.
Hvad gælder da om differensen $a - b$? Går k op i differencen og i givet fald hvor mange gange?
Hvad gælder da om summen $a + b$? Går c op i summen og i givet fald hvor mange gange?

Hver gang vi smider det største af tallene ud i et par bliver det erstattet af differencen. Hvis vi omvendt går baglæns i Euklids algoritme, vil et af tallene blive erstattet med summen de to tal.

d) Prøv fx i hånden at gennemføre Euklids algoritme for de to tal a = 60 og b = 75. Kontroller at alle de fundne egenskaber vi har snakket om er gyldige for din udregning. Hvad bliver det største fælles mål.

ISBN 978 87 7066 827 9

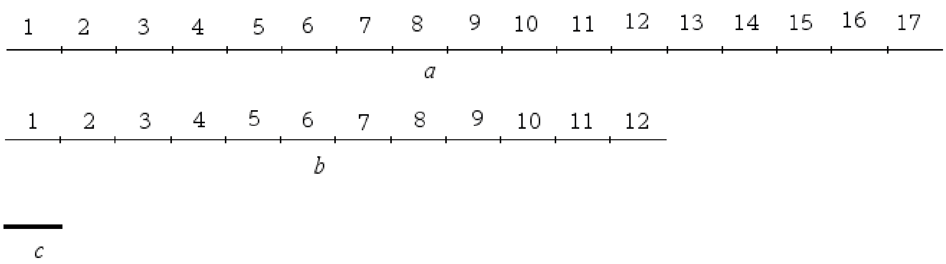
Det kunne du sikkert også have fundet selv hurtigere ved at gætte dig frem, men det afgørende er selvfølgelig at du nu har en systematisk og sikker metode til at finde det største fælles mål.

e) Prøv nu at forklare med dine egne ord:
   1) Hvorfor alle parrene i Euklids algoritme har de samme fælles mål.
   2) Hvorfor vi til syvende og sidst må finde et par, der indeholder 0, og hvor det andet tal, derfor nødvendigvis må være det største fælles mål.

Bemærkning: Hvis to tal a pog b har 1 som det største fælles mål, dvs. de har ingen fælles primfaktorer, siges de at være *indbyrdes primiske*. Det er en bemærkelsesværdig kendsgerning at vi har en simpel algoritme for at afgøre om to givne hele tal er indbyrdes primiske, men vi kender ingen algoritme, der på tilsvarende hurtigt og simpelt kan afgøre om et givet helt tal er et primtal. Man kan indvende at Euklids algoritme ikke er så hurtig, men der findes simple kunstgreb, der sætter hastigheden op. Så Euklids algoritme er en rigtig succes-historie.

1. 2 Opdagelsen af de inkommensurable størrelser

VI har set at ethvert par af naturlige tal *a* og *b* har et største fælles mål, dvs. et tal *c*, der går op i dem begge, dvs. som kan måle dem begge. Vi skifter nu til geometrien og kigger på linjestykker. To linjestykker *a* og *b* kan også have et fælles mål *c* i form af et linjestykke, der går et helt antal gange op i både a og b. VI kan tænke på linjestykket c som en fælles målestok for linjestykkerne *a* og *b*:



På figuren fx går linjestykket *c* netop 17 gange op i linjestykket *a* og 12 gange op i linjestykket *b*. Hvis vi bruger linjestykket *c* som måle-enhed får linjestykket *a* altså længden 17 og linjestykket *b* får længden 12.

Så langt så godt: Vi kan måle længder af linjestykker, hvis vi vælger en måleenhed og ser hvor mange gange den går op. Vælger vi måleenheden behændigt kan vi endda bruge hele tal som måltal.

Ifølge overleveringen tilskrives pythagoræerne udsagnet 'Alt er tal'. Det er ikke helt klart, hvad der menes med udsagnet, men en mulig tolkning er at alt kan måles med hele tal og dermed beskrives ved hjælp af hele tal.

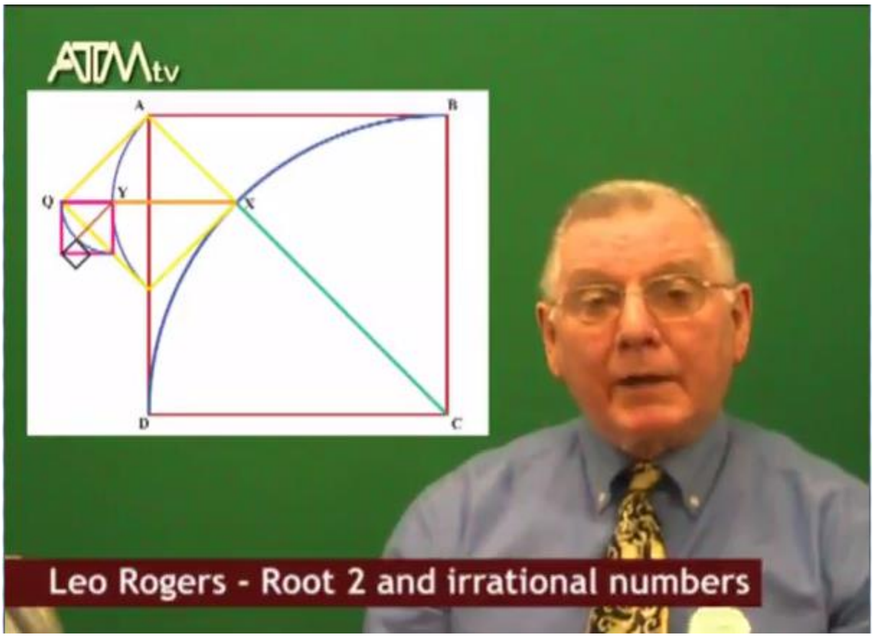
ISBN 978 87 7066 827 9

Det forudsætter at vi kan finde en passende målestok at måle størrelser med. Her er der to muligheder:

1) Det kan være at der findes en universel målestok, der kan bruges til alle linjestykker. Hvis der fandtes en mindste størrelse, et atom for linjestykker, tænk fx på et lille punkt med en vis størrelse, som alle andre linjestykker kunne opbygges af. Så ville vi kunne bruge denne 'atomare' enhed som målestok. Ideen er fristende, men løber hurtigt ind i det problem at vi kan blive ved med at halvere linjestykker og dermed frembringe vilkårligt små linjestykker i strid med at der skulle findes et mindste linjestykke. Så en sådan universel målestok er ikke en farbar antagelse.
2) Men det kunne også være at der findes målestokke af alle mulige størrelser, så når vi har givet to vilkårlige linjestykker *a* og *b* kan vi finde en passende målestok *c*, der passer for netop disse to linjestykker, men ikke nødvendigvis kan bruges for andre par af linjestykker. Det er den sidste opfattelse, man i almindelighed tilskriver pythagoræerne. De har næppe gjort den sig bevidst, men gået ud fra at sådan er verden indrettet.

Hvorom alting er, kan vi finde den fælles målestok ved at anvende Euklids algoritme: Vi kan nemlig trække linjestykker fra hinanden eller lægge to linjestykker sammen (i forlængelse af hinanden). Der er bare en vigtig forskel mellem tal og linjestykker. Når vi arbejder med hele tal er der en mindste enhed, nemlig tallet 1. Det sikrer at Euklids algoritme nødvendigvi s går i stå. Når vi arbejder med linjestykker er der imidlertid ikke nogen nedre grænse for hvor små de kan være. Vi kan derfor ikke være sikre på at Euklids algoritme anvendt på linjestykker også rent faktisk går i stå: I princippet kan den fortsætte i det uendelige og blot frembringe stedse mindre par. I så fald findes der ikke nogen fælles målestok for de to linjestykker: Man siger der er inkommensurable (dvs. uden fælles mål).

Som forberedelse til at forstå hvordan pythagoræerne i princippet kan have opdaget sådanne inkommensurable størrelser vil vi bede dig kigge på følgende video
http://www.youtube.com/watch?v=i2YKYCSZRnU&feature=related:



ISBN 978 87 7066 827 9

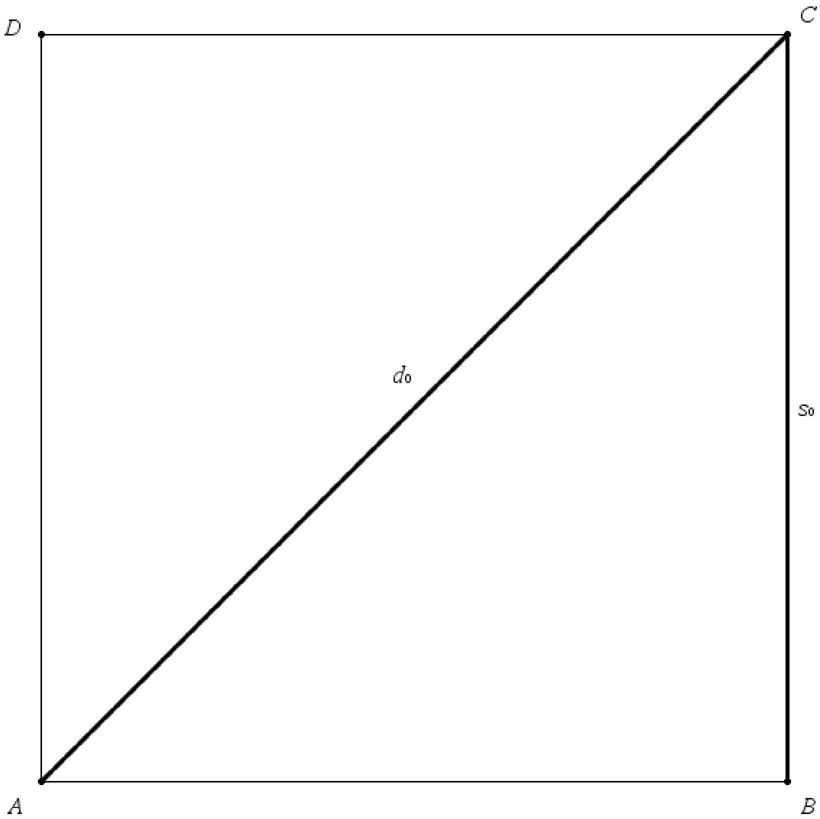
f) Genskab konstruktionen i detaljer og forklar hvad det er den viser.
Hvad er Leo Rogers argument for at siden og diagonalen i et kvadrat er inkommensurable, dvs. ikke kan have en fælles målestok? Her følger en transskription fra slutningen af videoen: *'Again with the pink square its diagonal is the square root of two if you use the side of the pink square as a unit. Now you can see that this process can go on and on and on… and I think this is a very nice visual representation for the fact that you cannot coincide the length, no matter how small the units are, between the side of the square and its diagonal; and this is where we get non-rational numbers from'.*

g) Hvad har konstruktionen at gøre med Euklids algoritme?

1.3 Siden og diagonalen i et kvadrat

Vi vil nu prøve at forstå et af de klassiske argumenter for hvorfor siden og diagonalen i et kvadrat er inkommensurable. Vi følger da konstruktionen fra videoen i spor detalje, men knytter den eksplicit til Euklids algoritme. Du bedes følge med i dit dynamiske geometriprogram!

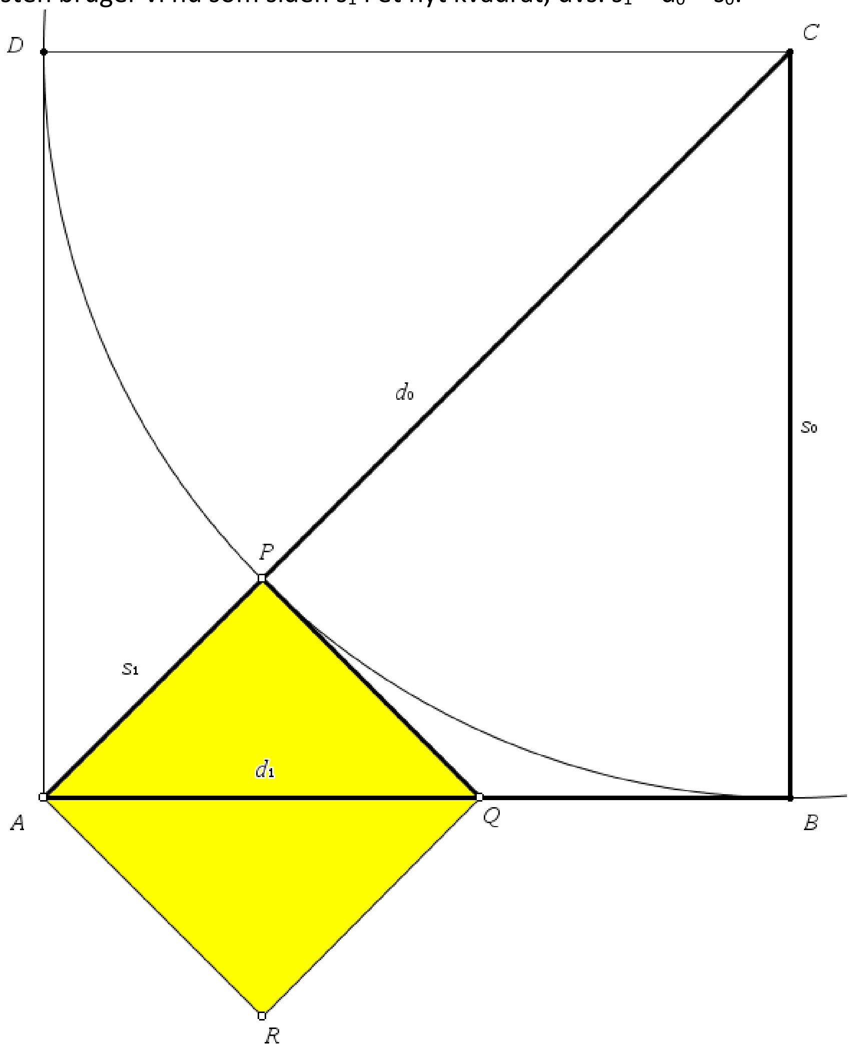
h) Udgangspunktet er et kvadrat med en side s_0 og en diagonal d_0, hvor diagonalen d_0 oplagt er længere end siden s_0:



Hvordan vil du trække siden s_0 fra diagonalen d_0?

ISBN 978 87 7066 827 9

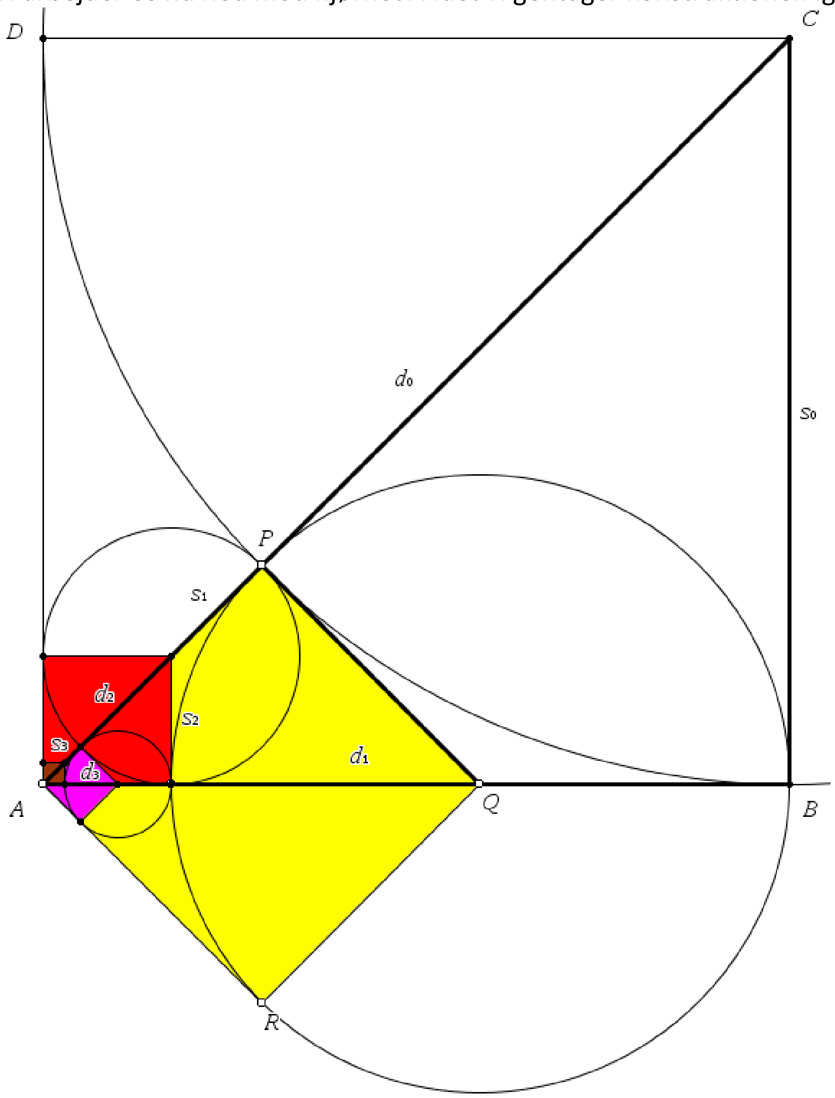
i) Resten bruger vi nu som siden s_1 i et nyt kvadrat, dvs. $s_1 = d_0 - s_0$:



Den nye diagonal d_1 er da fremkommet ved at vi har trukket stykket *QB* fra siden s_0. Overvej nu hvor langt linjestykket *QB* er i forhold til de andre størrelser på figuren. Kig fx grundigt på firkanten *CPQB* og find ud af hvilke egenskaber denne firkant har. Gør rede for hvordan konstruktionen af den nye diagonal d_1 hænger sammen med Euklids algoritme.

ISBN 978 87 7066 827 9

j) Vi arbejder os nu ned mod hjørnet *A* idet vi gentager konstruktionen igen og igen:



Hvorfor viser denne konstruktion nu, at siden og diagonalen nødvendigvis er inkommensurable (dvs. ikke kan have noget fælles mål)? Hvori består modstriden med antagelsen om et fælles mål?

ISBN 978 87 7066 827 9

1.4 Side-diagonal tallene

Uden et fælles mål kunne man tro det ikke var muligt at knytte hele tal til siden og diagonalen i et kvadrat, men faktisk opstår der af sig selv en berømt talfølge, de såkaldte side-diagonaltal, i forbindelse med den ovenstående konstruktion.

k) For at forstå disse tal åbner vi et regneark og gennemfører nu Euklids algoritme på samme måde som i den geometriske konstruktion. I hvert par sætter vi siden først og dernæst diagonalen: I cellerne a1 og a2 indskriver vi derfor s_0 og d_0 (uden at give dem talværdier!):

	A	B
◆		
1	s0	
2	d0	
3	d0−s0	
4	2*s0−d0	
5		
A4	=a1−a3	

Derefter kan du trække cellerne a3 og a4 ned gennem regnearket og derved udføre Euklids algoritme. Du finder da en lang stribe af kombinationer af den oprindelige side s0 og den oprindelige diagonal d0 der gengiver de nye sider og diagonaler.

l) Kontroller fx de følgende formler for s_3 og d_3 ved opmåling i din geometriske konstruktion:
$s_3 = 5\cdot d_0 - 7\cdot s_0$, $d_3 = 10\cdot s_0 - 7\cdot d_0$
Det er koefficienterne til disse størrelser, der kaldes side-diagonaltallene. Nedskriv de første ti koefficienter til siderne og se om du kan gætte systemet i tallene:
$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}17\\12\end{bmatrix}\ldots$

m) Da siderne (og tilsvarende diagonalerne) bliver stedse mindre vil de hurtigt nærme sig 0. Du kan kontrollere det i dit regneark ved at sætte siden s_0 til 1 og diagonalen d_0 til $\sqrt{2}$ (både symbolsk og som decimaltal). Hvis vi fx kigger på den tolvte side fås:
$s_{12} = 19601\cdot s_0 - 13860\cdot d_0$, $s_{12} = 19601 - 13860\sqrt{2}$ og $s_{12} = 0.000026$
Hvad fortæller det om kvadratroden af 2? Hvilken brøk kan man bruge som approksimation til kvadratroden af 2. Hvor god er brøken? Kig fx på brøkens kvadrat!

Side-diagonaltallene blev siden hen til stor inspiration for matematikerne. I bog A vender vi tilbage til dem og prøver at kigge nærmere på deres betydning i talteori.

ISBN 978 87 7066 827 9

2. Inkommensurabilitet - et begreb hos middelalderteologerne

I et værk om *Naturerkendelse og teologi* konfronterede Olaf Pedersen, der var professor i fysik og videnskabshistorie, naturvidenskabelig og teologisk tilværelsestydning. Værket giver en historisk oversigt, som rækker fra den græske oldtid til det 19. århundrede, og han påviser heri, hvorledes middelalderens store tænkere i flere henseender foregreb det naturvidenskabelige gennembrud. Ikke mindst matematikken gav et videnskabeligt grundlag for en dybere filosofisk indsigt i naturens og universets sammenhænge.

Du kan **her** finde et uddrag af værket, hvor vi møder en række af middelalderens største tænkere og specielt via Oresme får et indblik i deres forestillinger og måder at ræsonnere på. For Oresme er det naturligt at inddrage overvejelser om inkommensurable størrelser, når man skulle prøve at begribe verden.

Hent skriftet. Hvad er de grundlæggende temaer, og hvordan indgår begrebet *inkommensurable størrelser* i Oresmes argumentation? Betyder begrebet det samme som det gør i dag for os?