**ISBN 978 87 7066 827 9**



L&R Uddannelse EGMONT

# Projekt 10.11. Det udelukkede tredjes princip

## Indhold



En dør kan ikke både være åben og lukket. En mand kan ikke både være skaldet og have hår på hovedet. Dette grundlæggende logiske princip eller aksiom, der kaldes *modsigelsesprincippet,* er alle enige om.

Det indirekte bevis i matematik bygger på et nært beslægtet, men dog mere vidtgående princip indenfor logik, der kaldes for *det udelukkede tredjes princip*. I gamle dage, hvor videnskabsmænd kommunikerede på latin, kaldtes princippet for *Tertium non Datur* (dvs: Ingen tredje mulighed findes).
Dette princip eller aksiom siger, at for en given påstand gælder altid, at *enten er påstanden sand eller den modsatte påstand er sand*. Der er ikke en tredje mulighed. Selv om man i daglig tale har et begreb som *halvdød*, så er der ingen tilstand midt imellem.

Men i sådanne spørgsmål - og endnu mere i etiske og æstetiske spørgsmål – kan man ofte være uenige om definitionerne. Det er naturligvis heller ikke sikkert vi kan afgøre hvilken af to muligheder, der er den rigtige.

**Øvelse 1**
Er den anklagede skyldig i mord? Selv om vi ikke kan afgøre det med 100 % sikkerhed i en retssag, så er der normalt et svar, og det er enten ja eller nej. Er det altid sådan? illustrer dit svar med eksempler.

I matematik er de mest omstridte anvendelse af princippet henholdsvist de indirekte beviser og de såkaldte *eksistensbeviser*, hvor vi fx beviser, at der findes et tal, som opfylder det og det, uden at vi angiver tallet.

**© 2017 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk**
KOPIERING FORBUDT

**ISBN 978 87 7066 827 9**



L&R Uddannelse EGMONT

# Indirekte beviser

## Eksempel 1. Bevis for at $\sqrt{2}$ ikke kan skrive som en brøk, dvs er inkommensurabel med tallet 1

Hvis tallet $\sqrt{2}$ kan skrives som en brøk, så findes der hele tal $p$ og $q$, så $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$.

Ved at kvadrere og bagefter gange over får vi:

$$2=\frac{p^2}{q^2}$$

$$2\cdot q^2=p^2 \qquad (1)$$

Beviset kan nu fortsætte i to versioner:

**1. version**

Det er en grundlæggende egenskab ved de hele tal, at ethvert helt tal kan skrives som produkt af primtal, og at dette kun kan gøres på én måde:

$$30=2\cdot3\cdot5 \qquad 40=2\cdot2\cdot2\cdot5$$

Hvis vi forestiller os, at *p* produkt af primtal, så indeholder $p^2$ de samme primtal, blot *to af hver*:

$$30^2=2\cdot3\cdot5\cdot2\cdot3\cdot5 \qquad 40^2=2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5$$

Det samme gælder for $q^2$.

**Øvelse 2**

Udnyt nu dette til at argumentere for, at ligningen (1) ikke kan stemme.

*Konklusion:* Den oprindelige antagelse, at der findes hele tal $p$ og $q$, så $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, må være forkert.

**2. version**

Vi starter med at forkorte brøken $\frac{p}{q}$ mest muligt, så der nu ikke er noget helt tal, der går op i både *p* g *q*.

Se på ligningen (1): Her står, at 2 går op i $p^2$. Dvs $p^2$ er et lige tal. Så er også *p* et lige tal.

**Øvelse 3**

Vis det ved at vise følgende:

- hvis $a$ er et lige tal, dvs. $a$ kan skrives på formen $2k$, hvor $k$ er et helt tal, så er $a^2$ et lige tal
- hvis $a$ er et ulige tal, dvs. $a$ kan skrives på formen $2k + 1$, hvor $k$ er et helt tal, så er $a^2$ et ulige tal.

Nu har vi argumenteret for at *p* er et lige tal. Dvs. der findes et helt tal *n*, så:

$$p=2\cdot n$$

$$p^2=2\cdot n\cdot2\cdot n \qquad \text{kvadrer på begge sider}$$

$$2\cdot q^2=2\cdot n\cdot2\cdot n \qquad \text{indsæt i (1)}$$

$$q^2=n\cdot2\cdot n \qquad \text{forkort 2 væk}$$

**© 2017 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk**

KOPIERING FORBUDT

**ISBN 978 87 7066 827 9**



Som før ser vi nu, at $q^2$ er et lige tal, og derfor at $q$ er et lige tal.
Men vi startede jo med at sige, at brøken ikke kunne forkortes. Nu ser vi den kan forkortes. Begge ting kan ikke passe.

*Konklusion:* Den oprindelige antagelse, at der findes hele tal $p$ og $q$, så $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, må være forkert.

**Øvelse 4**
Argumenter for at $\sqrt{3}$ er irrational.

Beviset for, at $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som en brøk er et såkaldt *indirekte bevis*. Man argumentere for en påstand ved *at antage den modsatte påstand er sand*. Her antog vi, at $\sqrt{2}$ *kan* skrives som en brøk. Gennem omskrivninger og logiske argumenter når vi derefter frem til noget, der er indlysende forkert. Men så må antagelsen være forkert.
Læg mærke til, at denne bevismetode bygger på det grundlæggende aksiom: Enten er påstanden sand eller den modsatte påstand er sand.
I matematik er indirekte beviser meget anvendt, men der findes også en "skole" der afviser metoden.

## Eksempel 2. Påstand: *i en retvinklet trekant er kateternes sum større end hypotenusen.*

Kalder vi kateterne $a$ og $b$ og hypotenusen $c$, kan den sproglige form oversættes til symbolsk form:

$$a+b>c$$

Antag det modsatte og foretag følgende udregninger, hvor du argumenter for hver enkelt omskrivning:

$$a+b\leq c$$
$$(a+b)^2\leq c^2$$
$$a^2+b^2+2\cdot a\cdot b\leq c^2$$
$$c^2+2\cdot a\cdot b=a^2+b^2+2\cdot a\cdot b\leq c^2$$
$$c^2<a^2+b^2+2\cdot a\cdot b\leq c^2$$
$$c^2<c^2$$

*Konklusion*: Da dette er åbenlyst forkert, må den oprindelige påstand være sand.

**© 2017 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk**
KOPIERING FORBUDT

**ISBN 978 87 7066 827 9**





# Eksistensbeviser

## Eksempel 1. Euklids eksistensbevis vedr. mængden af primtal.

Vi ønsker at bevise følgende sætning af Euklid:
*Der er flere primtal end ethvert forelagt antal*.

**Bevis** (*Vi følger den danske oversættelse af Euklid, men skriver tal I stedet for linjestykker*)
Lad tallene $p$, $q$ og $r$ være de forelagte primtal. Jeg påstår da, at der er flere primtal end $p$, $q$ og $r$.

Lad nemlig $s$ være det mindste tal, som både $p$, $q$ og $r$ går op i.

**Øvelse 2**
Hvad er $s$ for et tal? Giv evt. taleksempler.

Betragt tallet $t$ =s + 1.
Enten er $t$ et primtal, eller også er det ikke et primtal.

Antag først $t$ er et primtal. Så er der fundet flere primtal end $p$, $q$ og $r$, nemlig end $p$, $q$, $r$ og $t$.

Men antag så, at $t$ ikke er et primtal. Så findes der et primtal, der går op i $t$.
Lad $u$ være et primtal der går op i $t$. Jeg påstår da, at $u$ ikke kan være et af tallene $p$, $q$ og $r$. Thi hvis det var, så ville $u$ gå op i $s$. Men desuden går $u$ op i $t = s + 1$. Derfor vil $u$ gå op i *forskellen*, som er 1, hvilket er urimeligt.

**Øvelse 3**
Argumenter for, at hvis et tal $z$ går op i to forskellige tal, så går det også op i forskellen. Giv taleksempler.
Tegn på en tallinje: Hvis eksempelvis 7 går op i et tal $n$, så er $n$ med i 7-tabellen. Anvend dette til et generelt argument

Altså kan $u$ ikke være det samme som et af tallene $p$, $q$ og $r$. Og det var givet, det er et primtal. Altså er der fundet flere primtal end $p$, $q$ og $r$, nemlig end $p$, $q$, $r$ og $u$

**Øvelse 4**
Illustrer gangen i beviset med nogle forskelle valg af de tre tal $p$, $q$ og $r$.

**Øvelse 5**
Euklid gør ikke selv opmærksom på det, men hvor i beviset anvender Euklid *det udelukkede tredjes princip*.

**© 2017 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk**
KOPIERING FORBUDT

**ISBN 978 87 7066 827 9**



## Eksempel 2. Eksistensbevis vedr. irrationale tal

Vi ønsker at bevise følgende sætning:

*Der findes irrationale tal a og b, så tallet* $a^b$ *er rational.*

**Bevis.**

Vi ved fra tidligere, at $\sqrt{2}$ er irrational.

Betragt nu tallet $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Ifølge *det udelukkede tredjes princip* er dette tal enten rational eller irrational.

Hvis det er et rationalt tal er vi færdige, for så vil $a = b = \sqrt{2}$ opfylde sætningen.

Hvis det er et irrationalt tal, så sætter vi $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ og $b = \sqrt{2}$. Det er to irrationale tal, og der gælder:

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\right)} = \sqrt{2}^2 = 2$$

Dvs tallet $a^b$ er rational.

*Konklusion*: Vi har hermed ved hjælp af det udelukkede tredjes princip vist, at enten er $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rational, eller også er $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ rational. (Men vi ved ikke hvilket af dem det er!)

## Brug af det udelukkede tredjes princip i andre fag og andre sammenhænge

Nedenfor er gengivet en række citater. Vælg nogle af dem ud og giv et svar på følgende:

I hvilken forstand kan man sige at det udelukkede tredjes princip er i spil i pågældende citat. Og hvis det er, er der så tale om et rimeligt brug af princippet, eller er der tale om et misbrug af princippet. Hvis øvelsen gennemføres i et samarbejde med andre fag, inddrag så gerne større citater til en mere grundig sammenhængende analyse med brug af pågældende fags analysemetoder.

a) Præsident George W. Bush I talen til kongressen 20 September 2001: "*Our response involves far more than instant retaliation and isolated strikes. Americans should not expect one battle, but a lengthy campaign, unlike any other we have seen. It may include dramatic strikes, visible on television, and covert operations, secret even in success. We will starve terrorists of funding, turn them one against another, drive them from place to place, until there is no refuge or rest. And we will pursue nations that provide aid or safe haven to terrorism. Every nation, in every region, now has a decision to make. Either you are with us, or you are with the terrorists. From this day forward, any nation that continues to harbor or support terrorism will be regarded by the United States as a hostile regime*." Hele talen findes **her**.

b) George Orwell skrev I 1942 et essay med titlen *Pacifism and the War*, "*If you hamper the war effort of one side you automatically help that of the other. Nor is there any real way of remaining outside such a war as the present one. In practice, 'he that is not with me is against me'. The idea that you can somehow remain aloof from and superior to the struggle, while living on food which British sailors have to risk their lives to bring you, is a bourgeois illusion bred of money and security*."

c) I den afsluttende episode af filmen *Star Wars Episode III: Revenge of the Sith*, siger Darth Vader til Obi-Wan Kenobi, "If you're not with me, then you're my enemy." Obi-Wan responds, "Only the Sith deals in absolutes."

**© 2017 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk**

KOPIERING FORBUDT

**ISBN 978 87 7066 827 9**



d) Ifølge Mattæus evangeliet kap. 12 hedder det, efter at Jesus skulle have uddrevet en ond ånd:
*Da farisæerne hørte det sagde de: "Det kan kun være ved hjælp af Beelzebub, de onde ånders fyrste, at han uddriver de onde ånder"*
*Da Jesus kendte deres tanker sagde han til dem: "Ethvert rige, der er kommet i splid med sig selv, lægges øde; og ingen by og intet hjem, der er kommet i splid med sig selv kan bestå. Og hvis Satan uddriver Satan, så er han kommen i splid med sig selv; hvorledes kan hans rige da bestå. Og hvis jeg uddriver onde ånder ved Beelzebub, ved hvis hjælp uddriver så jeres egne tilhængere dem? Derfor skal de være jeres dommere.*
*Men hvis det er ved Guds ånd, jeg uddriver onde ånder, så er jo Guds rige kommet til jer… Den som ikke er med mig, er imod; og den som ikke samler med mig spreder.*

e) I diskussioner om fx økonomisk politik, siges der ofte: *Der er to veje i den økonomiske politik…* Find selv eksempler på dette.

**© 2017 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk**
KOPIERING FORBUDT