ISBN 978 87 7066 827 9

L&R Uddannelse
EGMONT

Projekt 10.10
Archimedes skrift *Sandtælleren*

"Der er nogle, Kong Gelon, der tror, at sandet er uendeligt i sin mangfoldighed; og med sandet mener jeg ikke blot det, der findes omkring Syrakus og i resten af Sicilien, men også det, der findes i enhver anden egn, beboet eller ubeboet. Der er atter andre, der uden at betragte det som uendeligt dog mener, at intet tal kan angives, som er stort nok til at overgå dets mangfoldighed."

Sådan indledes det lille skrift *Sandtælleren* (engelsk: *Sandreckoner*) af Archimedes. Skriftet, der er gengivet nedenfor, rummer følgende:

- Første sider af kildeskriftet i Archimedes eget sprog.
- Resten af skriftet gengivet i en refererende stil, idet alle symboler og tal er skrevet om til vores talsystem og vores geometriske symboler.
- Efterfølgende er der nogle siders kommentarer. Disse kommentarer kan dels være en hjælp til læsningen af skriftet, dels hjælpe med til at finde svar på spørgsmålene i øvelserne.

Skriftet med kommentarer er gengivet fra Peter Wolf, *Højdepunkter i matematikken*. Peter Wolfs materiale er oversat fra Thomas Heath udgave af Archimedes skrifter.

Archimedes regnes i dag som en af historiens allerstørste matematikere. Han har ydet bidrag til fysikkens og matematikkens udvikling på utallige områder, og han tænkte så originalt, at han foregreb mange ting, man først rigtig fik hold på 2000 år senere.

Øvelse1
Hvem var Archimedes, hvor og hvornår levede han? Hvilke verdenshistoriske begivenheder udspillede sig på hans tid?
Find på nettet en omtale af nogle af Archimedes opdagelser eller opfindelser inden for fysik og matematik, og fortæl om mindst tre af disse.

I *Sandtælleren* argumenterer Archimedes for, at der i hele universet ikke findes noget, der er uendeligt stort, selv om vi ofte bruger dette begreb. Han gør dette ved hjælp af et tankeeksperiment, hvor hele universet fyldes med det mindste man kan forestille sig, nemlig sandkorn. Naturligvis findes der mange ting i naturen, der er mindre end et sandkorn, men det er let at se, at hans argument kan udstrækkes til hvad som helst, der er mindre.

Undervejs har han brug for en lang række vurderinger af størrelser og størrelsesforhold.

Øvelse 2
Hvilke talsystemer havde Archimedes til rådighed? Sammenlign de talsystemer, du omtaler, med vores moderne talsystem.

ISBN 978 87 7066 827 9

Øvelse 3
Archimedes starter med en diskussion af selve verdensbilledet og fortæller her om Aristarchos teori. Hvad går denne ud på? Aristarchos er blevet kaldt oldtidens Kopernikus. Hvorfor mon det? Sandtælleren er faktisk det ældste kildeskrift til vores viden om Aristarchos teori. Hvorfor inddrager Archimedes dette i sit skrift?

Øvelse 4.
Archimedes gennemgår nu, hvorledes han kommer fra et sandkorn til hele universet. Opskriv alle disse trin, han går igennem. (En chiliagon er en tusindkant).

Archimedes forskellige antagelser er ikke så afgørende – det centrale er, at der findes en forstørrelsesfaktor / skalafaktor, når vi går op af trinene fra sandkornet til universet. I afsnit 2 gennemgås Archimedes konkrete vurderinger. De har en ret teknisk karakter, men demonstrerer samtidig hvordan Archimedes arbejdede som praktisk matematiker, og viser dermed en anden side af den græske matematik, end den vi kender fra Euklid

Øvelse 5.
I kapitel 11, *fagligt samarbejde matematik og fysik* behandles nogle af disse trin i afsnit 1.1. Det drejer sig om:
- beregning af hvor stor Jorden er
- beregning af afstanden til Månen
- beregning af afstanden til Solen.

Hent denne gennemgang fra kapitel 11 og sammenlign med det som Archimedes skriver.

For at håndtere de meget store tal har Archimedes brug for at udvikle det ret primitive græske talsystem. I kildeskriftet er Archimedes beskrivelser af størrelser og forhold omskrevet til ti-talsystemet. Ellers ville det være meget vanskeligt at læse.

Øvelse 6.
Det moderne talsystem, vi anvender, er et *positionstalsystem med tallet 10 som grundtal*. Hvad menes hermed?

Øvelse 7
Gennemgå afsnit 3 i skriftet.
a) Hvad er en myriade?
b) Hvad er tal af første orden?
c) Hvad er en periode?
d) Gør rede for på hvilken måde Archimedes talsystem med ordner og perioder ligner vores positionstalsystem og på hvilken måde det adskiller sig. Har vi noget i vores talsystem, der svarer til Archimedes *periode*?

ISBN 978 87 7066 827 9

Øvelse 8

I slutningen af afsnit 3 formulerer Archimedes en sætning om hvordan man regner med disse store potenstal. I beviset indgår bl.a. følgende brøk: $\frac{A_m}{A_1} = \frac{A_{m+n-1}}{A_n}$

Nogle matematikhistorikere har sammenlignet Archimedes nye talbegreb med de logaritmer, som Napier opfandt i 1600-tallet. Dette er omtalt i indledningen til kapitel 6 i grundbogen. Slå op dér og kommenter, om du synes der er et slægtskab mellem den tankegang, vi møder hos Archimedes med hans system, og den tankegang vi møder ca 2000 år senere hos Napier.

Øvelse 9

Hvilken genre hører skriftet *Sandtælleren* til? Hvem henvender Archimedes sig til? Hvordan skal vi forstå denne form? Sammenlign med, hvordan der blev drevet videnskab på fx Tycho Brahes og Galileis tid, og hvordan de udformede deres videnskabelige skrifter. Sammenlign med hvordan det sker i dag.

ISBN 978 87 7066 827 9

Archimedes skrift *Sandtælleren*

1. Indledning

Der er nogle, Kong Gelon, der tror, at sandet er uendeligt i sin mangfoldighed; og med sandet mener jeg ikke blot det, der findes omkring Syrakus og i resten af Sicilien, men også det, der findes i enhver anden egn, beboet eller ubeboet. Der er atter andre, der uden at betragte det som uendeligt dog mener, at intet tal kan angives, som er stort nok til at overgå dets mangfoldighed. Og det er klart, at de, der mener dette, om de forestillede sig en mængde af sand så stor som hele jorden med alle have og huler fyldt op til en højde så stor som det højeste bjerg, langt mindre kunne vedkende sig, at der kunne nævnes et tal, som oversteg mangfoldigheden af det således tagne sand.

Men jeg vil forsøge at vise Jer ved hjælp af geometriske beviser, som I let vil kunne følge, at der blandt de tal, som jeg har givet navn i det værk, jeg sendte til Zeuxippos, findes nogle, der overstiger ikke blot antallet af sandskorn i en mængde så stor som den på denne måde opfyldte jord, men også det i en mængde så stor som hele universet. Nu ved I, at »universet« er den benævnelse, som de fleste astronomer bruger for den kugle, hvis centrum er jordens centrum, og hvis radius er lige så stor som den rette linie mellem solens centrum og jordens centrum. Dette er den almindelige opfattelse, således som I har hørt den fra astronomerne.

Men Aristarch fra Samos udgav en bog bestående af visse hypoteser, hvori præmisserne fører til det resultat, at universet er mange gange større end det, der nu kaldes således. Hans hypoteser går ud på, at fiksstjernerne og solen forbliver ubevægede, at jorden bevæger sig om solen i en cirkelbane, at solen befinder sig som centrum for denne bane, og at fiksstjernekuglen, der har samme centrum som solen, er så stor, at den cirkel, som han antager, jorden bevæger sig i, forholder sig til afstanden til fiksstjernerne, som kuglens centrum forholder sig til dens overflade. Men det er let at indse, at dette er umuligt; thi da kuglens centrum ikke har nogen størrelse, kan vi ikke opfatte det som havende noget som helst forhold til kuglens overflade. Vi må imidlertid antage, at Aristarch mener dette: da vi så at sige anser jorden for at være centrum for universet, er det forhold, som jorden har til det, vi kalder »universet«, det samme som det forhold den kugle, der indeholder den cirkel, som jorden efter hans mening bevæger sig i, har til fiksstjernekuglen. Thi han tilpasser beviserne for sine resultater efter en hypotese af denne art, og i særdeleshed er det tydeligt, at han i størrelse antager den kugle, hvori han forestiller sig jordens bevægelse, som værende lig med det, vi kalder »universet«.

Jeg påstår da, at selv om sandet udgjorde en kugle så stor, som Aristarch forestiller sig fiksstjernekuglen, så kan jeg stadig bevise, at der blandt de tal, der er nævnt i *Principperne,* er nogle, der i mægtighed overstiger mangfoldigheden af en sandmængde så stor som den omtalte kugle, forudsat følgende antagelser.

1. Antagelse

Jordens omkreds er omkring 3.000.000 stadier og ikke større.

Det er sandt, som I naturligvis ved, at nogle har forsøgt at bevise, at den nævnte omkreds er omkring 300.000 stadier. Men jeg går videre endnu og antager, idet jeg fastsætter jordens størrelse til ti gange den størrelse, mine forgængere antog, at denne omkreds er omkring 3.000.000 stadier og ikke større.

ISBN 978 87 7066 827 9

2. Antagelse
Diameteren af jorden er større end diameteren af månen, og diameteren af solen er større end diameteren af jorden.
I denne antagelse følger jeg de fleste al de tidligere astronomer.

3. Antagelse
Diameteren af solen er omkring 30 gange diameteren af månen og ikke større.
Det er sandt, at af de tidligere astronomer fastsatte Eudoxos den til at være ni gange så stor og Pheidas, min fader, tolv gange, mens Aristarch forsøgte at bevise, at solens diameter er større end atten, men mindre end tyve gange månens diameter. Men jeg går endnu videre end Aristarch, så at sandheden af min påstand kan fastslås udover enhver diskussion, og jeg antager solens diameter til at være omkring 30 gange månens og ikke større.

4. Antagelse
Diameteren af solen er større end siden i en chiliagon indskrevet i den største cirkel i universet.
Denne antagelse gør jeg, fordi Aristarch opdagede, at solen forekom at være $\frac{1}{720}$ af Dyrekredsen, og jeg prøvede selv ved hjælp af en metode, som jeg nu vil beskrive, ved forsøg at finde den vinkel, som udspændes af solen, og som har sin vinkelspids i øjet.

[Afhandlingen er indtil dette sted oversat ordret på grund af den historiske interesse, der knytter sig til Archimedes' egen fremstilling af dette emne. Resten af værket gengiver vi mere frit.]

Inden vi går i gang med det matematiske indhold, skal det blot bemærkes, at Archimedes dernæst viser, hvorledes han nåede frem til en øvre og en nedre grænse for den af solen udspændte vinkel. Han tog en lang stok eller lineal, i hvis ene ende han fastgjorde en lille cylinder eller skive; hvorefter han anbragte stokken, så at den pegede i retning af solen umiddelbart efter solopgang (så at han kunne betragte den direkte); dernæst anbragte han cylinderen, så at den henholdsvis lige netop skjulte og lige netop ikke skjulte solen, og til sidst målte han de vinkler, der udspændtes af cylinderen. Han giver også anvisning på, med hvor meget han finder det nødvendigt at korrigere det fundne resultat som følge af, »at øjet ikke ser fra et punkt, men fra et vist område«.

ISBN 978 87 7066 827 9

2. Vurderinger af de indbyrdes størrelsesforhold

Som resultat af forsøget fandt Archimedes, at den vinkel, hvorunder solens diameter ses, er mindre end $\frac{1}{164}$ og større end $\frac{1}{200}$ af en ret vinkel. *Det skal (under denne antagelse) bevises, at diameteren af solen er større end siden i en chiliagon, eller figur med 1000 lige store sider, indskrevet i en storcirkel på »universets kugle«.*

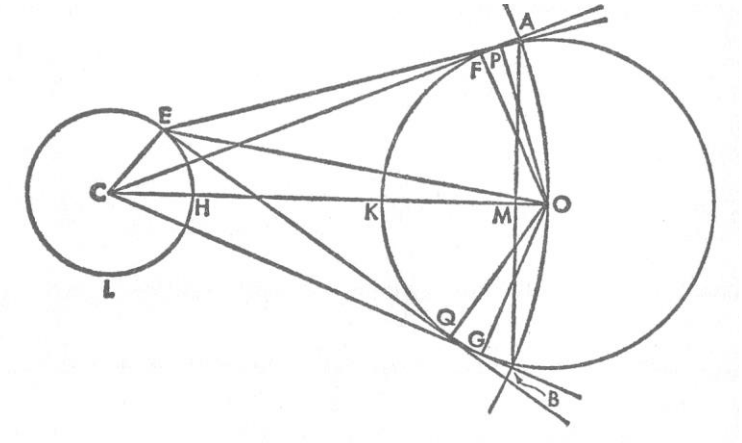
-

Lad papirets plan være den plan, der går igennem solens centrum, jordens centrum og øjet, netop som solen er steget op over horisonten. Lad denne plan skære jorden i cirklen *EHL* og solen i cirklen *FKG; C* og *O* er henholdsvis jordens og solens centrum, og *E* er øjets placering.

Lad endvidere denne plan skære »universets« kugle (dvs., den kugle, der har C som centrum og *CO* som radius) i storcirklen *AOB.*
Fra *E* tegnes de to tangenter til cirklen *FKG;* de rører denne i henholdsvis *P* og *Q*. Fra *C* tegnes to andre tangenter til samme cirkel; de rører i *F* og *G.*

Lad i det plane snit *CO* skære jorden og solen i henholdsvis *H* og *K,* og lad *CF's* og *CG's* forlængelser skære storcirklen *AOB i A* og *B.*

EO, OF, OG, OP, OQ og *AB* forbindes, og lad *AB* skære *CO* i *M.*



Da solen netop er oppe over horisonten, gælder *CO > EO.* Følgelig

$$\angle PEQ > \angle FCG$$

$$\angle PEQ > \frac{1}{200}R$$

hvor *R* betegner en ret vinkel.
men

$$\angle PEQ < \frac{1}{164}R$$

ISBN 978 87 7066 827 9

Så meget desto mere:

$$\angle FCG < \angle R,$$

og korden *AB* må derfor i storcirklen spænde over en bue, der er mindre end $\frac{1}{656}$ af hele cirklens omkreds, d. v. s. :

$AB <$ siden i en ligesidet 656-kant indskrevet i cirklen.

Nu er omkredsen af enhver polygon, der er indskrevet i denne cirkel, mindre end $\frac{44}{7}CO$ [Jfr. *Måling af en cirkel.* Sætn. 3]. Vi får heraf (begrund de enkelte trin):

$$\frac{AB}{CO} < \frac{11}{1148},$$

$$AB < \frac{1}{100}CO \qquad (\alpha)$$

Da *CA = CO,* og *AM* er vinkelret på *CO,* mens *OF* er vinkelret på *CA,* må det endvidere gælde, a:

AM = OF.

AB = 2 AM = soldiameteren.

Kombiner med (α), og argumenter for følgende:

soldiamereren $< \frac{1}{100}CO$, ifølge (α)

jorddiameteren $< \frac{1}{100}CO$ [Antagelse 2]

$$CH + OK < \frac{1}{100}CO,$$

$$HK > \frac{99}{100}CO,$$

$$\frac{CO}{HK} < \frac{100}{99}$$

Udnyt nu:

$$CO > CF \text{ og } HK < EQ:$$

$$\frac{CF}{EQ} < \frac{100}{99} \qquad (\beta)$$

For siderne, der indeslutter de rette vinkler i de retvinklede trekanter *CFO* og *EQO*, gælder *OF = OQ,* og *EQ < CF* (da *EO < CO).* Argumenter for følgende:

$$\frac{\angle OEQ}{\angle OCF} > \frac{CO}{EO},$$

$$\frac{\angle OEQ}{\angle OCF} > \frac{CF}{EQ}$$

En fordobling af vinklerne giver:

$$\frac{\angle PEQ}{\angle ABC} < \frac{CF}{EQ} < \frac{100}{99} \qquad \text{ifølge } (\beta)$$

ISBN 978 87 7066 827 9

Men i begyndelsen af disse vurderinger så vi:

$$\angle PEQ > \frac{1}{200}R$$

og følgelig $$\angle ACB > \frac{99}{20000}R > \frac{1}{203}R\ .$$

Buen *AB* er derfor større end $\frac{1}{812}$ af storcirklen *AOB's* omkreds.

Så meget desto mere er *AB* større end siden i en chiliagon indskrevet i denne storcirkel, og *AB* er lig med diameteren af solen, således som det blev bevist ovenfor.

Følgende resultater kan nu bevises:

diameteren af »universet« < 10 000 jorddiametre.

og derfor: *diameteren af »universet«* < 10 000 000 000 stadier.

(1) For kortheds skyld betegnes »universets« diameter med d_u, solens med d_s, jordens med d_j og månens med d_m.

Ifølge hypotese gælder $d_s > 30\ d_m$. [Antagelse 3]

og $d_j > d_m$, [Antagelse 2]

og følgelig $d_s < 30\ d_j$.

Nu er ifølge sidste sætning,

d_s > siden i chiliagon indskrevet i storcirkel,

så at,

chiliagonomkredsen <1000 $d_s < 30\,000\ d_j$.

Men omkredsen af enhver i en cirkel indskrevet regulær polygon med flere end seks sider er større end omkredsen af den regulære sekskant og derfor større end tre gange diameteren. Altså:

chiliagonomkredsen >3 d_u.

Det følger at:

$$d_u < 10\,000\ d_j\ .$$

(2) jordomkredsen $\leq$ 3 000 000 stadier [Antagelse 1]

og jordomkredsen > 3 d_j.

Følgelig:

d_j < 1 000 000 stadier,

og altså:

d_u < 10 000 000 000 stadier.

ISBN 978 87 7066 827 9

5. Antagelse

Lad os betragte en mængde af sand, der ikke er større end et valmuefrø. Vi antager, at den ikke indeholder flere end 10 000 korn.

Antag endvidere, at valmuefrøets diameter ikke er mindre end $\frac{1}{40}$ *af en fingerbredde.*

3. Ordener og perioder for tal.

I. For tallene op til en myriade (10 000) har vi de sædvanlige navne; vi er derfor i stand til at udtrykke tal op til en myriade myriader (100 000 000). Lad os kalde disse tal for tallene af *første orden.* Lad 100 000 000 være enheden for den *anden orden* og lad den *anden orden* bestå af tallene fra denne enhed op til
$(100\,000\,000)^2$,
Lad dette på sin side være enheden for tallene af *tredje orden,* der afsluttes med $(100\,000\,000)^3$, og så fremdeles, indtil vi når til tallene af *100 000 000. orden,* der afsluttes med $(100\,000\,000)^{100\,000\,000}$, som vi vil kalde for *P.*

II. Lad de netop beskrevne tal fra 1 til *P* udgøre den *første periode.* Lad *P* være enheden for den *anden periodes første orden,* og lad denne bestå af tallene fra *P* til 100 000 000 *P.* Lad dette sidste tal være enheden for den *anden periodes anden orden,* og lad denne afsluttes med $(100\,000\,000)^2 P$. På denne måde kan vi fortsætte, indtil vi når den *anden periodes 100 000 000 orden,* der afsluttes med $(100\,000\,000)^{100\,000\,000}$ *P* eller P^2.

III Idet P^2 vælges som enhed for den *tredje periodes første orden,* kan vi fortsætte på samme måde, indtil vi når *den tredje periodes 100 000 000 orden,* der afsluttes med P^3.

IV. Idet P^3 vælges som enhed for den *fjerde periodes første orden,* kan vi fortsætte med denne fremgangsmåde, indtil vi når den *100 000 000 periodes 100 000 000. orden,* som afsluttes med $P^{100\,000\,000}$, Dette sidste tal udtrykkes af Archimedes som en myriade-myriade enheder af den myriademyriadende orden af den myriade-myriadende periode, og det ses let at være 100 000 000 gange produktet af $(100\,000\,000)^{9\,999\,999}$ og $P^{9999\,999}$ dvs. $P^{100\,000\,000}$.

[Det således beskrevne talskema kan fremstilles mere overskueligt ved hjælp af titalspotenser og potenser i det hele taget.

Første periode

Første orden Tallene fra			1 til 10^8
Anden orden	»	»	10^8 til 10^{16}.
.			
.			
.			
10^8. *orden*	»	»	$10^{8\cdot(10^8-1)}$ til $10^{8\cdot 10^8}$ (eller *P)*

ISBN 978 87 7066 827 9

L&R Uddannelse EGMONT

Anden periode

Første orden» » $P \cdot 1$ til $P \cdot 10^8$

Anden orden » » $P \cdot 10^8$ til $P \cdot 10^{16}$

.
.
.

10^8*. orden* » » $P \cdot 10^{8\cdot(10^8-1)}$ til $P \cdot 10^{8\cdot(10^8)}$ (el. P^2)

.
.
.

10^8. periode

Første orden» » $P^{10^8-1}\cdot 1$ til $P^{10^8-1} \cdot 10^8$

Anden orden » » $P^{10^8-1} \cdot 10^8$ til $P^{10^8-1} \cdot 10^{16}$

.
.
.

10^8*. orden* » » $P^{10^8-1} \cdot 10^{8\cdot(10^8-1)}$ til $P^{10^8-1} \cdot 10^{8\cdot 10^8}$ (d.v.s. P^{10^8})

Dette skemas uhyre omfang kan bedst vurderes, om man gør sig klart, at det sidste tal i første periode i titalssystemet skrives 1 efterfulgt af 800 000 000 cifre, mens det sidste tal i 10^8. periode kræver 100 000 000 gange så mange cifre, dvs. 80 000 millioner millioner cifre.]

Oktader.

Lad os betragte den kvotientrække, hvis første led er 1, og hvis andet led er 10 [dvs. rækken 1, 10^1, 10^2, 10^3, ...]. Den *første oktade* af denne rækkes led [dvs. 1, 10^1, 10^2, ..., 10^7] hører til i den ovenfor beskrevne *første periodes første orden,* den *anden oktade* [dvs. 10^8, 10^9 ..., 10^{15}] i den *første periodes anden orden,* og oktadens første led er i begge tilfælde enheden for den tilsvarende orden. På samme måde, hvad angår den tredje oktade og så fremdeles. Vi kan på denne vis placere vilkårligt mange oktader.

Sætning.

Hvis der i en kvotientrække A_1, A_2, A_3, ... , A_m, ... , A_n, ... ,A_{m+n-1},... med A_1= 1, og A_2=10, [dvs. rækken 1, 10^1, 10^2, 10^{m-1}, ..., 10^{n-1} , … , 10^{m+n-2} ...] er vilkårligt mange led, og er der udvalgt to vilkårlige led A_m og A_n, som multipliceres med hinanden, da vil produktet $A_m \cdot A_n$ være et led i den samme række og ligge lige så mange led fra A_n, som A_m ligger fra A_1; endvidere vil det ligge et antal led fra A_1, som er en mindre end summen af antallet af led, som henholdsvis A_m og A_n ligger fra A_1.

ISBN 978 87 7066 827 9

L&R Uddannelse
EGMONT

Bevis

Tag det led, der ligger lige så mange led fra A_n, som A_m ligger fra A_1. Dette antal led er *m* (idet såvel det første som det sidste led tælles med).
Det omtalte led ligger derfor *m* led fra A_n og er følgelig leddet A_{m+n-1}.

Vi skal altså vise

$$A_m \cdot A_n = A_{m+n-1}$$

Nu er led, der ligger lige langt fra andre led i en kvotientrække, proportionale. Altså

$$\frac{A_m}{A_1} = \frac{A_{m+n-1}}{A_n}$$

men $A_m = A_m \cdot A_1$, da $A_1=1$.

Følgelig er $A_{m+n-1} = A_m \cdot A_n$ (1)

Det andet resultat følger nu af sig selv, da A_m ligger *m* led fra A_1, A_n ligger *n* led fra A_1, og A_{m+n-1} ligger (*m+n-1)* led fra A_1.

ISBN 978 87 7066 827 9

L&R Uddannelse EGMONT

4. Anvendelse på antallet af sandskorn.

Ifølge Antagelse 5 er

$$\text{diameteren af valmuefrø} \geq \frac{1}{40} \text{ fingerbredde}$$

og da kugler forholder sig til hinanden som tredie potens af forholdet mellem deres diametre, får vi, at kuglen med diameter på

1 fingerbredde ≤ 64 000 valmuefrø
≤ 64 000·10 000 sandskorn
≤ 640 000 000 sandskorn
≤ 6 enheder af *anden orden* + 40 000 000 enheder af *første orden* sandskorn

og så meget desto mere < 10 enheder af tallenes *anden orden* sandskorn.

Vi forøger nu gradvist diameteren af den betragtede kugle, idet vi hver gang multiplicerer den med hundrede. Idet vi husker, at kuglen herved multipliceres med 100^3 eller 1 000 000, når vi for hver ny diameter frem til, hvor mange sandskorn den pågældende kugle kan rumme, på følgende måde:

	Kuglens diameter	*Tilsvarende antal sandskorn*	
(1)	100 fingerbredder	< 1 000 000 · 10 enheder af *anden orden* < (rækkens 7. led) · (rækkens 10. led) < rækkens 16. led < 10 000 000 enheder af *anden orden*	 [dvs. 10^{15}] [el. 10^{7}]
(2)	10 000 fingerbredder	< 1 000 000 · (sidste tal) < (7. led) · (16. led) < 22. led < 100 000 enheder af *tredje orden*	 [dvs. 10^{21}] [el. 10^{6}]
(3)	1 stadie (10 000 fingerbredder)	< 100 000 enheder *al tredje orden*	
(4)	100 stadier	< 1 000 000 · (sidste tal) < (7. led) · (22. led) < 28. led < 1 000 enheder af *fjerde orden*	 [10^{27}]
(5)	10 000 stadier	< 1 000 000 · (sidste tal) < (7. led) · (28. led) < 34. led < 10 enheder af *femte orden*	 [10^{33}]
(6)	1 000 000 stadier	< (7. led) · (34. led) < 40. led < 10 000 000 enheder af *femte orden*	 [10^{39}]
(7)	100 000 000 stadier	< (7. led) · (40. led) < 46. led < 100 000 enheder af *sjette orden*	 [10^{15}]
(8)	10 000 000 000 stadier	< (7. led) · (46. led) < 52. led < 1 000 enheder af *syvende orden*	 [10^{51}]

ISBN 978 87 7066 827 9

Men ifølge tidligere sætning gælder

diameteren af »universet« < 10 000 000 000 stadier.

Altså: *Antallet af sandskorn, der kan indeholdes i en kugle på størrelse med vort »univers«, er mindre end 1 000 enheder af tallenes syvende orden* [eller 10^{51}].

Heraf kan vi endvidere bevise, at *en kugle af den størrelse, som Aristarch tillægger fiksstjernekuglen, vil kunne indeholde et antal sandskorn, der er mindre end 10 000 000 enheder af tallenes ottende orden eller* $10^{56}+^{7}=10^{63}$.

Thi vi har ifølge hypotese (se indledningen til skriftet):

$$\frac{\text{Jorden}}{\text{"Universet"}} = \frac{\text{"Universet"}}{\text{Fiksstjernekuglen}}$$

Argumenter nu for følgende:

»universets« diameter < 10 000 jorddiametre
fiksstjernekuglens diameter < 10 000 universdiametre.
(fiksstjernekuglen) < $(10\,000)^3$ · (»universet«).

Om antallet af sandskorn, der kan indeholdes i en kugle på størrelse med fiksstjernekuglen, vil det følgelig gælde, at det er:

< $(10\,000)^3$ · 1 000 enheder af *syvende orden*
< (13. led) · (52. led)
< 64. led [10^{63}]
< 10 000 000 enheder af *ottende orden.*

Archimedes konklusion.
"Jeg tror, at disse ting, Kong Gelon, vil forekomme utrolige for det store flertal af folk, der ikke har studeret matematik, men at beviset for dem, der er bevandrede deri, og som har gjort sig tanker om spørgsmålene vedrørende afstandene og størrelserne af jorden og solen og månen og hele universet, vil virke overbevisende. Og det var af denne grund, at jeg ikke anså dette emne som upassende for Jeres overvejelser.«

ISBN 978 87 7066 827 9

5. Kommentarer til Archimedes skrift

Archimedes har ydet værdifulde bidrag til så godt som alle de matematiske discipliner, han kom i berøring med. Archimedes udviste i hele sin levetid (287-212 f. K.) forbløffende færdigheder inden for geometrien og aritmetikken, og inden for fysikken, hvor han især studerede vægtstangens og flydende legemers forhold.

Archimedes levede i Syrakus på Sicilien, men havde studeret i Alexandria. *Sandtælleren* er stilet til Gelon, kongen i Syrakus, og Archimedes stod på en god fod med såvel Gelon som hans far Hiero. På foranledning af kongerne i Syrakus konstruerede Archimedes adskillige sindrige mekaniske indretninger beregnet til at afslå belejrende hæres angreb. Archimedes lagde selv ringe vægt på disse geniale maskiner; han betragtede sig først og fremmest som matematiker, og det var hans ønske, at der på hans gravsten skulle indgraveres en kugle med en omskrevet cylinder til minde om det, han betragtede som sit livs største bedrift: opdagelsen af volumenet af kuglen og cylinderen.

Archimedes blev dræbt, da Syrakus i 212 f. K. blev erobret af romerne under anførsel af Marcellus, og det på trods af, at Marcellus på forhånd havde beordret, at han skulle lades uskadt. Marcellus, der følte sig skyldbetynget over den ulykkelige begivenhed, lod Archimedes begrave under store æresbevisninger. Den største kilde til vor viden om Archimedes er Plutark's *Marcellus' liv,* men det bedste indtryk af ham får man gennem hans egne bøger, hvoraf ikke helt få er bevaret. I *Sandtælleren* får man, selv om det er et kort værk, et godt indblik i hans videnskabelige kunnen, ligesom hans matematiske evner klart kommer for dagen.

Vi har alle sammen på et eller andet tidspunkt mødt personer, der er tilbøjelige til overdrivelse i alt, hvad de siger. En af de almindeligste overdrivelser er at sætte ordet »uendelig« i stedet for udtrykket »meget stor«. Mange siger, at »det og det er uendeligt meget bedre end det og det«, eller »en moderne raket er uendeligt mere kompliceret end brødrene Wright's flyvemaskine«, eller »antallet af atomer i den og den ting er uendeligt«. Disse udtryk er ikke blot unøjagtige; de er forkerte. Der er intet på denne jord, der er uendeligt mere kompliceret eller uendeligt meget bedre end noget andet, og de ting findes ikke, som der er uendelig mange af. En uendelig mængde er en mængde, der ikke kan tælles, og omvendt fastlægges alt, som kan tælles — enhver selv nok så stor mængde, hvis antal kan gøres op — som værende endeligt. En god definition på »uendelig« er det at sige, at »uendelig« er større end ethvert selv nok så stort tal. »Uendelig« er følgelig ikke selv et tal; thi efter ethvert tal følger et nyt, der er større.

Kong Gelon, som *Sandtælleren* henvender sig til, var øjensynligt en person, for hvem »meget stor« og »uendelig« var synonymer, i særdeleshed når »meget stor« ville sige af størrelsesordenen millioner eller mere. Archimedes vil i denne lille afhandling vise kongen, at »stor« — ligegyldigt hvor stor — ikke er »uendelig«, men så ganske afgjort endelig. Archimedes vælger sig en mængde — mængden af sandskorn, der kan rummes i en kugle så stor som universet — der for den ukyndige tager sig ud, som var den uendelig, hvorefter han tæller den; eller rettere sagt, han viser, at den valgte mængdes antal med sikkerhed ikke overstiger et vist tal, som han angiver. Og kan mængden tælles, da er den ikke uendelig.

ISBN 978 87 7066 827 9

For at kunne gøre, hvad han har sat sig for, må Archimedes først danne sig et begreb om universets størrelse. Han må forklare os, hvad han forstår ved »universet«, og hvor stort han anser det for at være. Han må fortælle os, hvilken størrelse han vil tillægge et sandskorn. Dernæst må Archimedes finde en måde at angive meget store tal på, så at han explicit kan fortælle os, hvor mange sandskorn universet rummer. Det er ham ikke nok at sige: »Det er et meget stort tal«; thi det er der ingen, der benægter. For at kunne sige, at sandmængden er endelig, må man tilskrive den et ganske bestemt antal, eller i det mindste angive en øvre grænse for dens antal.

Ved »universet« forstår Archimedes det rum, der indesluttes af fiksstjernekuglen (i oldtidens astronomi antog man, at stjernerne var fæstnet på en himmelkugle). I sin forklaring skriver han følgende (idet vi stadig må huske på, at den er henvendt til kong Gelon):

> Nu ved I, at »universet« er den benævnelse, som de fleste astronomer bruger for den kugle, hvis centrum er jordens centrum, og hvis radius er lige så stor som den rette linie mellem solens centrum og jordens centrum.

Dette er den geocentriske opfattelse af universet: man forestiller sig jorden som universets centrum, hvorom solen, månen, planeterne og fiksstjernerne alle bevæger sig. I denne hypotese betragtes fiksstjernerne i reglen som liggende længere væk end alle andre himmellegemer, men i Archimedes' formulering er det åbenbart solen, der har størst afstand til jorden.

Archimedes fortæller dernæst, at der findes en opfattelse af universet, der afviger fra den geocentriske:

> Men Aristarch fra Samos udgav en bog bestående af visse hypoteser, hvori præmisserne fører til det resultat, at universet er mange gange større end det, der nu kaldes således. Hans hypoteser går ud på, at fiksstjernerne og solen forbliver ubevægede, at jorden bevæger sig om solen i en cirkelbane, at solen befinder sig som centrum for denne bane, og at fiksstjernekuglen, der har samme centrum som solen, er så stor, at den cirkel, som han antager, jorden bevæger sig i, forholder sig til afstanden til fiksstjernerne, som kuglens centrum forholder sig til dens overflade.

Dette er det heliocentriske synspunkt: solen er universets centrum, hvorom jorden bevæger sig. Fiksstjernerne er virkelig faste — dvs. ubevægede — men de ser ud til at bevæge sig som følge af jordens daglige omdrejning. Selvfølgelig er dette den selvsamme teori, som fremsattes af Kopernikus 1700 år senere. Aristarchs teori kunne ikke stå sig mod den konkurrerende geocentriske teori, der umiddelbart forekom enklere. I tidens 1013 fik den geocentriske teori imidlertid så mange ændringer og tilføjelser behov, at den på Kopernikus' tid var langt mere kompliceret end den genopdagede heliocentriske teori.

I den heliocentriske teori må fiksstjernerne ligge langt fjernere fra jorden, end de behøver at gøre i den geocentriske teori: selv om jorden undertiden er nærmere, undertiden fjernere fra en bestemt stjerne (afhængig af, hvor jorden befinder sig i sin årlige bevægelse omkring solen), ser det altid ud, som om den befandt sig lige i universets centrum. Dette kan kun være tilfældet, såfremt afstanden til fiksstjernerne er så stor, at afstanden til solen i sammenligning hermed ingen rolle spiller.

ISBN 978 87 7066 827 9

Dette er, hvad Archimedes mener, når han skriver: »fiksstjernekuglen ... er så stor, at den cirkel, som han antager, jorden bevæger sig i, forholder sig til afstanden til fiksstjernerne, som kuglens centrum forholder sig til dens overflade«.

Archimedes tager dernæst fat på at angive visse hypotetiske talværdier for universets størrelse. Det er ikke så meget de nøjagtige værdier for de astronomiske afstande, der interesserer ham; han ønsker først og fremmest i hvert tilfælde at være sikker på, at han har angivet en afstand, der er *større,* end den nogen sinde tidligere er blevet bestemt til. Kan han vise, at det er muligt at tælle antallet af sandskorn, der kan rummes i et sådant univers, da vil han også have vist, at man kan tælle antallet af sandskorn, der rummes i det virkelige univers, som er mindre.

Archimedes begynder med at angive en værdi for jordens omkreds, idet han antager, at den højst er 3 millioner stadier. Et stadie er en græsk længdeenhed, der ikke havde samme længde alle steder (ligesom pund, tomme osv. ikke er samme mål i England og Danmark). Til vort formål er det nok at vide, at et stadie svarer til ca. 200 meter. En beregning vil vise, at de 3 mio. stadier er meget længere end jordens omkreds, og at de 300 000 stadier, som Archimedes nævner, at visse astronomer har anslået den til, er et langt bedre mål; men som sagt, Archimedes er kun interesseret i målangivelser, der ikke er for små.

Dernæst bemærker Archimedes, at diameteren af solen er større end diameteren af jorden, der på sin side er større end diameteren af månen. Han antager endvidere, at solens diameter højst er 30 gange større end månens. Dette skøn bygger han på resultater, der tidligere er fundet ad eksperimentel vej; men for at være på den sikre side vælger han en værdi, der gør solen større, end nogen astronom tidligere har anslået den.

Så langt har alle antagelser drejet sig om diametrene af de tre himmellegemer: jorden, solen og månen. Da Archimedes er interesseret i »universets« størrelse, må han på en eller anden måde sætte disse diametre i relation til »universets« omkreds eller diameter, og det er netop, hvad han gør i Antagelse 4: diameteren af solen er større end siden i en chiliagon (regulær 1000-kant) indskrevet i universets »ækvator«. Denne påstand beviser Archimedes ved forsøg, hvorefter han fortsætter:

> diameteren af solen er mindre end eller lig med 30 månediametre
> månens diameter er mindre end jordens diameter
> 30 månediametre er mindre end 30 jorddiametre,

Heraf får vi:

> solens diameter er mindre end 30 jorddiametre.

Antagelse 4 siger, at:

> solens diameter er større end siden i en chiliagon indskrevet i universet,

ISBN 978 87 7066 827 9

Heraf får vi:

1.000 soldiametre er større end 1000 chiliagonsider,
1000 soldiametre er større end chiliagonomkredsen.
chiliagonomkredsen er mindre end 1000 soldiametre
chiliagonomkredsen er mindre end 30 000 jorddiametre.

Omkredsen af en regulær sekskant, der er indskrevet i en cirkel, er tre gange cirklens diameter. Enhver regulær polygon med mere end seks sider vil have en omkreds, der er større end sekskantens, men mindre end cirklens. Følgelig vil omkredsen af en regulær chiliagon, der er indskrevet i universets ækvator, være større end tre gange universets diameter. Argumenter nu for:

chiliagonomkredsen er større end 3 universdiametre
3 universdiametre er mindre end chiliagonomkredsen.
universdiameteren er mindre end en tredjedel af chiliagonomkredsen.

Indfører vi i denne ulighed den relation, der gælder mellem chiliagonomkredsen og jorddiameteren, får vi, at

universdiameteren er mindre end en tredjiedel af 30 000 jord-jorddiametre,
universdiameteren er mindre end 10 000 jorddiametre.

Da vi antog jordens omkreds til højst at være 3 millioner stadier, må jorddiameteren være mindre end 1 million stadier (thi cirklens omkreds er π gange diameteren, og π er større end 3).

Heraf får vi:

jorddiameteren er mindre end 1 million stadier,
universdiameteren er mindre end 10 000 millioner stadier
universdiameteren er mindre end 10 milliarder stadier.

Som vi tidligere har nævnt, er et stadie lig med ca. 200 meter eller en femtedel kilometer. »Universet« i denne beregning har derfor en diameter, der omtrent er lig med 2 milliarder kilometer. Der kan være enormt meget sand i en kugle af denne størrelse; men ikke desto mindre har Archimedes i sinde at fortælle os, hvor mange sandskorn universet ville rumme, hvis det var helt fyldt op med sand.

Vi simplificerer Archimedes' antagelser en smule og får følgende (argumenter for den enkelte trin):

1 stadie er lig med 10 000 fingerbredder,
1 fingerbredde er lig med 40 valmuefrødiametre,
1 stadie er lig med 400 000 valmuefrødiametre.

Nu forholder to kuglers rumfang sig til hinanden som tredje potenserne på deres diametre, og vi har derfor, at

$$\frac{\text{Rumfanget af en kugle med en diameter på 1 stadie}}{\text{Rumfanget af en kugle med diameter som et valmuefrø}} = \frac{400000^3}{1}$$

ISBN 978 87 7066 827 9

Archimedes regner nu:

$(400\,000)^3 = (4 \cdot 10^5)^3 = 64 \cdot 10^{15}$

Da en kugle med diameter som et valmuefrø ifølge Archimedes indeholder 10 000 sandskorn, vil en kugle med en diameter på 1 stadie indeholde $64 \cdot 15^{15} \cdot 10\,000$ sandskorn eller

$64 \cdot 10^{15} \cdot 10^4 = 64 \cdot 10^{19}$ sandskorn.

Ønsker vi at finde, hvor mange sandskorn der kan rummes i en kugle så stor som universet, dvs. i en kugle med en diameter på 10 milliarder stadier, må vi endnu en gang benytte os af den relation, der gælder mellem to kuglerumfang.

$$\frac{\text{Rumfanget af en kugle med en diameter på } 10^{10} \text{ stadier}}{\text{Rumfanget af en kugle med diameter på 1 stadie}} = \frac{\left(10^{10}\right)^3}{1} = 10^{30}$$

Da den mindste af de to kugler indeholder $64 \cdot 10^{19}$ sandskorn og den største indeholder 10^{30} gange så mange, vil den største indeholde $64 \cdot 10^{19} \cdot 10^{30} = 64 \cdot 10^{49}$ sandskorn. Med Archimedes' antagelser som udgangspunkt har vi altså fundet, at der i universet kan rummes $64 \cdot 10^{49}$ sandskorn (hvilket skrives som 64 efterfulgt al 49 nuller).

I denne beregning har vi benyttet os af betegnelserne fra 10-talssystemet. I dette system bygges der på 10-talspotenserne: 1, 10, 100, 1000, osv. Hver potens af ti giver navn til en hel række tal: enere, tiere, hundreder, tusinder, osv. Imidlertid kommer man hurtigt i bekneb for benævnelser af 10-talspotenserne, og det er under alle omstændigheder svært at huske, hvad de forskellige navne dækker over; hvad menes der for eksempel med en kvadrillion? Derfor gøres der fra matematikernes side end ikke forsøg på at benævne de meget store tal i ord; de skrives ganske enkelt som potenser af ti. Således skrives fem millioner ofte som $5 \cdot 10^6$, og for tal større end en million er denne notation praktisk taget obligatorisk; det er da også den, vi har benyttet under beregningen af det samlede antal sandskorn i universet.

Lad os se på det af Archimedes udtænkte system til benævnelse af tal og undersøge, om det er formålstjenligt i det forelagte tilfælde. Kan man i hans notation betegne tal så store som $64 \cdot 10^{49}$ (eller større endnu)? Grækerne havde i modsætning til os et særligt navn for tallet 10 000, idet de kaldte det for en »myriade«. De havde således særskilte betegnelser for tallene op til den fjerde potens af ti, nemlig ti, hundrede, tusinde og myriade. Tilsyneladende havde de ikke betegnelser for tal, der var større end 10000; for eksempel kendte de ikke betegnelsen en million. Med de navne, de havde, kunne de imidlertid navngive alle tallene op til en myriade myriader. Eksempelvis kunne et tal hedde således:

4838 myriader, 659 tusinder, 76 hundreder, 3 tiere, 5 og dette betyder:
$4838 \cdot 10\,000 + 659 \cdot 1000 + 76 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5$ hvilket i titalssystemet skrives som tallet 49 046 635.

Da en myriade myriader (100 000 000) er det sidste tal, del kan benævnes, foreslår Archimedes, at dette tal gøres til enhed for en ny gruppe tal, som han kalder for tallene af anden orden (tallene fra 1 til 100 000 000 kalder han for tallene af første orden). Tallene af anden orden går fra 100 000 000 til $(100\,000\,000)^2$. Dette sidste tal vælges som enhed for tallene af tredie orden. I almindelighed begynder tallene af n'te orden med $(100\,000\,000)^{n-1}$ og afsluttes med $(100\,000\,000)^n$.

ISBN 978 87 7066 827 9

På denne måde kan vi fortsætte, indtil vi når tallene af 100 000 000. orden, der afsluttes med tallet $(100\ 000\ 000)^{100\ 000\ 000}$ som Archimedes kalder for *P.* Med benyttelse af titalspotenser kan *P* skrives som $(10^8)^{10^8}$ eller $10^{8\cdot 10^8}$.

Archimedes kalder nu hele den gruppe tal, der består af tallene fra 1 til *P,* for tallene i den første periode. Dernæst lader han *P* være enhed for den anden periodes første orden, der består af tallene fra *P* til 100 000 000 · *P.* Der er ingen grund til at beskrive resten af systemet, da dette jo gøres så fortræffeligt af Archimedes selv. Hvad der imidlertid er interessant, er, at Archimedes, selv om han knap er begyndt, allerede forlænget har passeret det tal, der er brugt til angivelse af antallet af sandskorn i universet. Som vi så, var dette tal med tilnærmelse lig med $64\cdot 10^{49}$, altså mindre end 10^{52}, og lad os undersøge, hvor i Archimedes' skema dette tal befinder sig.

Første orden går fra 1 til 10^8
Anden orden går fra 10^8 til 10^{16}
Tredie orden går fra 10^{16} til 10^{24}
Fjerde orden går fra 10^{24} til 10^{32}
Femte orden går fra 10^{32} til 10^{40}
Sjette orden går fra 10^{40} til 10^{48}
Syvende orden går fra 10^{48} til 10^{56}

Antallet af sandskorn, der rummes i universet, kan altså udtrykkes ved et tal af syvende orden; man har slet ikke nødigt at gå længere end til tallene i den første periode!

For til fulde at kunne værdsætte Archimedes' bedrift ved udledningen af dette system må man huske, at vi til stadighed i vor forklaring har benyttet os af titalssystemets betegnelser og undervejs udtrykt alle Archimedes' tal ved hjælp af potenser al ti. Det skal ikke glemmes, at Archimedes ikke kendte til symbolet »0«. Det, der for os er let, har krævet en umådelig fantasi og indsigt; selv uden symbolet »0« har Archimedes været i stand til at angive grundlaget for en tal-notation: de tal, han kan udtrykke, bruger han som enhed for den følgende række tal. Dette er netop, hvad der gøres i titalssystemet eller for den sags skyld i ethvert andet system, hvor tallene skrives ved hjælp af potenserne af et eller andet vilkårligt valgt grundtal.