ISBN 9788770668279

Projekt 0.6 Keplers verdensbillede og de regulære polyedre

Johannes Kepler (1571-1630) var på mange måder en overgangsfigur i videnskabshistorien. Han ydede et stort bidrag til at matematisere naturvidenskaberne, og han søgte hele sit liv at finde de fysiske love, der hersker i naturen – på Jorden og i himmelrummet. Men han mente samtidig, at der var en højere religiøs forklaring på verdens indretning. Gud havde en plan, og Kepler var sat på Jorden for at bidrage til at afdække denne storslåede plan, skrev han engang.

Øvelse 1

Hvordan konstrueres den indskrevne og den omskrevne cirkel i en trekant?
Hvordan konstrueres den indskrevne og den omskrevne cirkel i et kvadrat?
Hvordan konstrueres den indskrevne og den omskrevne cirkel i en femkant?
Hvordan konstrueres den indskrevne og den omskrevne cirkel i en sekskant?

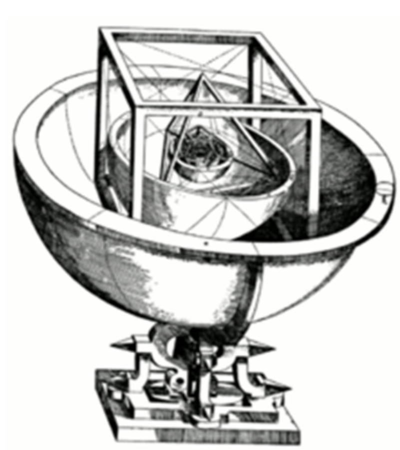
Men i hvilken rækkefølge kommer polygonerne fra de inderste til de yderste planeter? Da Kepler begynder at regne på det, så viser det sig, at radius i disse teoretiske cirkler er alt for langt fra den observerede afstand fra Solen. Teori og observationer passede ikke sammen, uanset hvilken rækkefølge der blev anvendt.

Men så "går det op for ham", at det ikke var polygoner, han havde set, men regulære polyedre. Og dem er der præcis 5 af. Konstrueres indskrevne og omskrevne kugler til polyedrene, så får vi 6 kugleskaller. Og der er 6 planeter, Merkur, Venus, Jorden, Mars, Jupiter og Saturn – idet Uranus, Neptun og Pluto endnu ikke var opdaget. Så det kunne ifølge Kepler ikke være tilfældigt.

Han manglede nu blot rækkefølgen, og efter en række beregninger nåede han frem til, at hvis polyedrene kommer i følgende rækkefølge: — oktaeder, ikosaeder, dodekaeder, tetraeder, terning — så giver det en god beskrivelse af de 6 planeters afstande til Solen.

På YouTube er der visualiseringer af **Keplers model fra Mysterium Cosmographicum.**

Dels en model hvor polyedrene bygges op,
og dels en model hvor planeterne er tegnet med ind



Kepler's model af Solsystemet fra Mysterium Cosmographicum

Close-up af den indre del af modellen

Kepler ledte resten af livet efter yderligere belæg for denne ”lov”, ikke i naturen, men i Bibelen. Han fik dog forbud mod at tage bibelfortolkningerne med i bogen.

Vi vil nu undersøge Keplers forestilling om solsystemet. Vi tager udgangspunkt i følgende planettabel, hvor vi dels skal have renset de planeter væk, Kepler ikke kendte, vi skal ikke have Månen med, og endelig skal vi have omregnet tabellen, så den inderste planet har middelafstand 1 (Husk at overveje om dit værktøj anvender decimnalkomma eller -punktum):

Nedenfor er der billeder af de regulære polyedre, hvor man kan trække rundt og se dem fra flere sider. Endvidere er der givet formler for radius i den indskrevne og den omskrevne kugle. Radius afhænger naturligvis af den fælles kantlængde.. Overvej at kantlængden kan opfattes som en skalafaktor (forstørrelsesfaktor), som er ganget på enhedspyramiden, enhedsoktaederet osv

	Middelradius (i km)	Middelafstand til Solen (i mio. km)
Solen	695000	
Merkur	2439	57,9
Venus	6051	108,2
Jorden	6378	149,6
Månen	1738	0,4
Mars	3397	227,9
Jupiter	71398	778
Saturn	60000	1429
Uranus	25400	2870
Neptun	24300	4497
Pluto	2900	5900

Øvelse 2
Opret en liste med planetafstandene for de relevante planeter (brug tallene i tabellen). Kald den feks *M*

Øvelse 3
Hvilken faktor *k* skal vi skalere planetafstandene ned med, hvis Merkurs afstand skal være 1? Skaler ned, ved at udregne $k \cdot M$. Dvs vi kan på en gang skalere alle ned.

Vi vil nu sammenligne med en liste vi kan få ud fra Keplers teori

Øvelse 4
Hop ned til terningen (heksaederet), der er den sidste af de 5. Prøv selv at bevise formlen for radius i den indskrevne og i den omskreevne kugle.

Vi vil blot acceptere alle de andre formler.

Øvelse 5
Udregn for alle polyedre radius i indskrevne og radius i omskrevne kugle, hvis vi antager at sidelængden er $a = 1$.

Øvelse 6
Udregn nu forholdet mellem radius i den ydre og radius i den indre kugleskal $\frac{R}{r}$ for Merkur. Beregn et tilnærmet tal. Radius r i den indre kugleskal, hvor Merkur sidder, har vi sat til at være 1. Argumenter for, at forholdet, vi har udregnet, derfor er radius i den ydre skal. Hvilken planet sidder i denne ydre skal? Sammenlign resultatet med tabellen fra øvelse 2.

Øvelse 7
Udregn forholdet $\frac{R}{r}$ for alle polyedrene. Udregn tilnærmede tal.

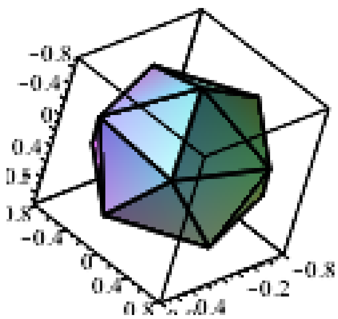
Øvelse 8
Du skal nu opstille en tabel over afstandene ifølge Keplers model, idet vi gåe ud fra at Merkur har afstanden 1. Øvelse 6 gav afstanden til den næste planet. Ved hjælp af tallene i øvelse 7 kan du nu arbejde dig skridt for skridt ud gennem planeterne. (Hjælp: Anvend, at den ydre kugleskal for én planet er den indre kugleskal for den næste, og brug så øvelse 7). Sammenlign Keplers tal med de korrekte afstande du beregnede i øvelse 2. Giv en vurdering af modellen.

Øvelse 9
Man ved ikke, hvorfor planeter befinder sig, hvor de er, og Kepler er ikke den eneste, der har ledt efter en sammenhæng. Undersøg via nettet hvad den såkaldte Titius-Bodes lov siger. Hvordan vil du karakterisere denne type lov? Er det en teori?
I Titius-Bodes lov taler man om "den manglende planet". Hvad mener man med det?

Materialer

with(*plottools*) :
with(*plots*) :

display(*icosahedron*([0, 0, 0], 0.8), *orientation* = [45, 0], *axesfont* = [*arial*, 7])



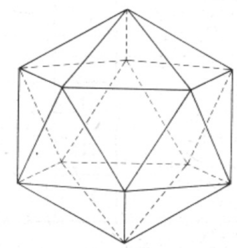
Regulært Ikosaeder (sidelængden er *a*)

$V = \frac{5}{12} \cdot a^3 \cdot \left(3 + \sqrt{5}\right)$

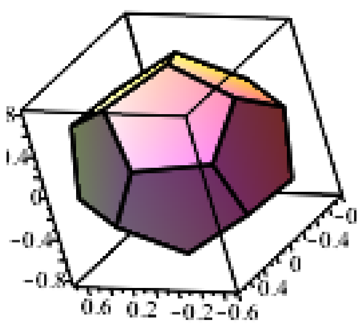
$O = 5a^2 \cdot \sqrt{3}$

$R = \frac{1}{4} \cdot a \cdot \sqrt{2\left(5 + \sqrt{5}\right)}$ (omskreven kugle)

$r = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}}$ (indskreven kugle)



display(*dodecahedron*([0, 0, 0], 0.8), *lightmodel* = *light2*, *shading* = *xy*, *axesfont* = [*arial*, 7])



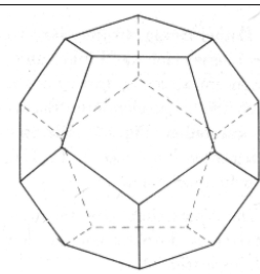
Regulært Dodekaeder (sidelængden er *a*)

$V = \frac{1}{4} \cdot a^3 \cdot \left(15 + 7\sqrt{5}\right)$

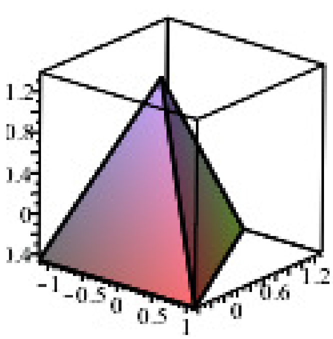
$O = 3a^2 \cdot \sqrt{5 \cdot \left(5 + 2\sqrt{5}\right)}$

$R = \frac{1}{4} \cdot a \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)\sqrt{3}$ (omskreven kugle)

$r = \frac{1}{4} \cdot a \cdot \sqrt{\frac{50 + 22\sqrt{5}}{5}}$ (indskreven kugle)



display(*tetrahedron*([0, 0, 0], 0.8), *orientation* = [−55, 65], *axesfont* = [*arial*, 7])



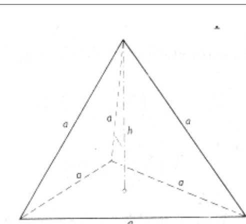
Regulært Tetraeder

$V = \frac{1}{12} \cdot a^3 \cdot \sqrt{2}$

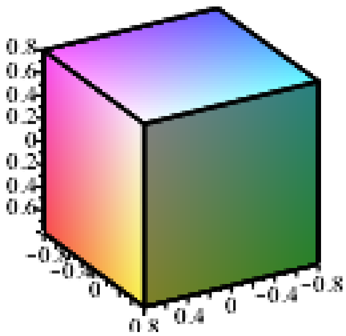
$O = a^2 \cdot \sqrt{3}$

$R = \frac{1}{4} \cdot a \cdot \sqrt{6}$ (radius i omskreven kugle)

$r = \frac{1}{12} \cdot a \cdot \sqrt{6}$ (radius i indskreven kugle)



$display(hexahedron([0, 0, 0], 0.8), orientation = [60, 65], axesfont = [arial, 7])$



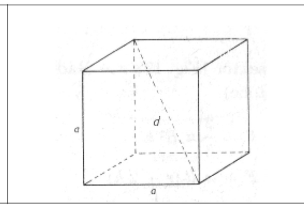
Terning

$V = a^3$

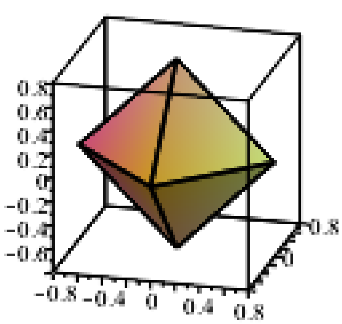
$O = 6a^2$

$R = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{3}$ (radius i omskreven kugle)

$r = \frac{1}{2} \cdot a$ (radius i indskreven kugle)



$display(octahedron([0, 0, 0], 0.8), orientation = [-75, 70], lightmodel = light2, shading = xy, axesfont = [arial, 7])$



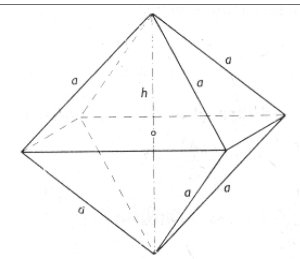
Regulært Oktaeder

$V = \frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot \sqrt{2}$

$O = 2a^2 \cdot \sqrt{3}$

$R = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2}$ (omskreven kugle)

$r = \frac{1}{6} \cdot a \cdot \sqrt{6}$ (indskreven kugle)



Dokumenter

På Henrik Kragh Sørensens hjemmeside kan man finde dokumentet Platon og Euklid om de "Platoniske Legemer".
Dokument indeholder længere citater fra Platons dialog Timaios, hvor denne behandler de regulære polyedre, og fra Euklid, der beviste, at der er præcis 5 regulære polyedre. Dokumentet indeholder en række øvelser i tilknytning hertil. Dokumentet er forfattet af Henrik Kragh Sørensen og Kirsti Andersen, der begge er videnskabs- og matematik-historikere.

Man kan også finde et dokument af Henrik Kragh Sørensen, der går dybere ned i de regulære polyedres struktur.