

Projekt 0.2. Eulers polyedersætning – Hvad er et matematisk bevis?

På engelsk kaldes denne sætning ofte for *Eulers formula*. Men man skal passe på ved søgning på nettet, for dette navn er også knyttet til en helt anden formel, der handler om de såkaldte komplekse tal.

Øvelse 1

- Start med at orientere dig om hvad sætningen siger om sammenhængen mellem antal hjørner, antal kanter og antal flader for et polyeder ved at besøge en hjemmeside som denne:
<http://www.mathsisfun.com/geometry/eulers-formula.html>
- Kontroller formlen med en pyramide og en terning
- Det kan være sværere at overskue de øvrige regulære polyedre. På adressen:
http://da.wikipedia.org/wiki/Platonisk_legeme er der lagt animationer ind, så man bedre kan overskue antallet af flader, kanter og hjørner. Kontroller formlen for de øvrige tre.

Øvelse 2. Gælder Eulers polyedersætning for alle polyedre?

- På <http://mathworld.wolfram.com/ArchimedeanSolid.html> kan man finde de 13 "halvregulære polyedre", eller som man også kalder dem: De archimediske polyedre. Gælder Eulers formel her? Afprøv den på nogle af dem.
- Tegn en terning med et firkantet hul igennem. Tæl antal hjørner, kanter og flader. Gælder Eulers formel stadig?
- Gå ind på siden http://en.wikipedia.org/wiki/Euler_characteristic . Hvad er *Euler karakteristikken* for en størrelse?

Beviser

Øvelse 3

På siden http://en.wikipedia.org/wiki/Euler_characteristic ligger et bevis for Eulers polyedersætning.

- Formuler sætningen
- Læs beviset igennem, så du har fanget ideen i det. Du behøver ikke gå alle detaljer igennem.

I en berømt matematikbog af den ungarske matematiker Imre Lakatos, *Proofs and Refutations*, gennemgås et bevis for Eulers polyedersætning, og samtidig gennemføres en diskussion af, om beviset holder.

Et stort uddrag af bogen er oversat til dansk af videnskabshistorikerne Henrik Kragh Sørensen og Kurt Ramskov, og kan hentes [her](#)

Øvelse 4

Læs s 8-12 (kapitel 1 og 2), hvor beviset gennemgås, og hvor der gennemføres en første diskussion af beviset.

Præsenter beviset for hinanden.

Øvelse 5

Læs den videre diskussion af beviset, kapitel 3, s 13-16. Noter de steder, hvor du ikke forstå argumenterne. Hvad betyder *modeksempler*? Hvilken rolle spiller de i matematik.

Øvelse 6

Læs den videre diskussion af beviset, kapitel 4, s 17-20. Notér de steder, hvor du ikke forstå argumenterne. Hvorfor begynder de at diskutere *definitioner*.

Afrunding

Der findes et væld af forskellige beviser for Eulers polyedersætning. Vælg endnu et bevis og gennemgå det.

- Den danske matematiker Hjelmslev menes at være ophavsmand til et af de mere visuelle beviser, som også er forholdsvis let at forstå – det såkaldte *vandstandsbevis*. Søg på nettet efter hvad dette går ud på. Eller læs beviset i Vagn Lundsgård Hansen, *Den geometriske dimension*.
- I en anden af de berømte matematikbøger fra det 20. århundrede, G. Polya, *Mathematics and plausible reasoning*, gives i bind 1, kapitel III (Induction in Solid Geometry) et såkaldt induktionsbevis for Eulers polyedersætning. Induktionsbeviser er omtalt i kapitel 3.
- På hjemmesiden: <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/> er samlet 20 forskellige beviser. De fleste ligger uden for gymnasiets faglige områder.

Øvelse 7

Den grundlæggende ide i opbygningen af matematisk teori bliver ofte beskrevet således:

Definition → Sætning → Bevis

Forklar ud fra de foregående øvelser, hvorfor dette diagram egentlig skulle tegnes som en cirkel i stedet for som en linje, og forklar undervejs med dine egen ord, hvad de tre begreber står for.